UNIVERSIDAD ESTATAL A DISTANCIA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

GUÍA DE ESTUDIO PARA EL CURSO 3011

CÁLCULO SUPERIOR

ELABORADA POR:

Hugo Barrantes Campos

2007

Producción Académica
Licda. Ana Mª Sandoval Poveda.

Digitación a cargo del Autor.

Diagramación e ilustraciones. Lic. Alberto Soto.

Presentación

La cátedra de Matemáticas Superiores les saluda y les desea que este curso llene sus expectativas para el último curso de cálculo de la carrera Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática, carrera que usted sigue en la Universidad Estatal a Distancia. Como cátedra, es para nosotros una gran responsabilidad y una obligación brindarle las herramientas necesarias para que su aprendizaje se logre no solo en el tiempo esperado, sino también en la profundidad que la materia requiere. Con este objetivo entregamos a ustedes esta guía esperando que sirva para definir pautas de estudio y puntos de atención en su aprendizaje.

La cátedra agradece a las compañeras Jendry Arguedas, y Sonia Cascante que ayudaron en la labor de incluir las correcciones que se hicieron al primer documento, utilizado desde el 2005.

Esta guía proporciona un material que tiene por objetivo orientarlo en el estudio de los diferentes temas de la unidad didáctica que para cubrir los contenidos en este caso corresponde al libro *Cálculo Vectorial* de J. E. Marsden y A. J. Tromba, de la editorial Pearson-Addison Wesley en su quinta edición.

En esta guía, para cada tema, se expone un resumen de su contenido, con aclaraciones de algunos conceptos y sobre la manera de enfocarlos, soluciones detalladas de algunos de los ejercicios propuestos en la unidad didáctica y algunos ejercicios adicionales. En cada caso se indicará el título del tema, tal como aparece en la unidad didáctica, y su ubicación en cada edición. Cuando se hace referencia a una página o a un ejercicio de la unidad didáctica se indicará la referencia a la quinta edición y, entre paréntesis, la indicación correspondiente a la cuarta edición. Este documento consta de tres partes:

- Una descripción detallada del curso.
- Una guía de estudio de los diferentes temas, con explicaciones, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos.

- Enunciados y soluciones de exámenes aplicados en periodos académicos anteriores.

Se espera que esta guía ayude a comprender algunos aspectos que puedan parecer poco claros en la unidad didáctica.

1. Breve descripción del curso

En el curso de Análisis Real se inició el estudio de las funciones de varias variables; esto es, funciones cuyo dominio es $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y cuyo codominio es $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Específicamente, este estudio se centró en el Cálculo diferencial en varias variables.

La primera parte del curso de Cálculo Superior amplía el estudio del Cálculo diferencial de las funciones de varias variables proporcionando una aplicación al Cálculo de máximos y mínimos e introduciendo los conceptos de rotacional y divergencia.

El resto del curso se dedica al estudio del Cálculo integral en varias variables, considerando dominios de integración de diferentes tipos: regiones planas, sólidos, curvas y superficies, que dan origen, respectivamente, a las integrales dobles, triples, de línea y de superficie.

1.1. Conocimientos previos

Además de los conocimientos básicos de la Matemática elemental se supone, por parte del estudiante, un conocimiento sólido en los siguientes temas:

1. Funciones reales de variable real, derivación y técnicas de integración (lo correspondiente a los cursos Cálculo Diferencial, código 175 y Cálculo Integral, código 178).
2. Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas que se estudian en el curso de Geometría Analítica, código 193.
3. Algunos de los conocimientos que se proporcionan en el curso de Álgebra Lineal código 191, tales como vectores, producto interno, distancia, longitud de un vector, producto vectorial, matrices y determinantes.
4. Lo básico del Cálculo diferencial en varias variables, estudiado en el curso de Análisis Real: funciones de varias variables, límites, continuidad, derivadas direccionales, derivadas parciales, gradientes y las propiedades correspondientes.

Cabe señalar que los dos primeros capítulos del texto que se utiliza en el curso constituyen un repaso de los temas que mencionamos en los puntos 2, 3 y 4. Le recomendamos su estudio, si considera que tiene algunas debilidades al respecto.

1.2. Unidad didáctica

A continuación señalamos los capítulos del texto que cubren los temas del curso y se señala la ubicación de capítulos y secciones en cada una de las ediciones.

Temas	Cuarta edición	Quinta edición
Extremos de funciones con valores reales Extremos restringidos y multiplicadores de Lagrange	Capítulo 3 secciones: 3.3 y 3.4	Ídem cuarta edición
Velocidad, aceleración Longitud de arco Campos vectoriales Divergencia y rotacional	Capítulo 2 sección: 2.4 Capítulo 4 secciones: todas	Ídem cuarta edición
Integral doble sobre un rectángulo Integral doble sobre regiones más generales Cambio de orden de integración Integral triple	Capítulo 5 secciones: 5.1 a 5.4 y 5.6	Capítulo 5 secciones todas
Geometría de las funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ Teorema del cambio de variables Aplicaciones de las integrales dobles y triple	Capítulo 6 secciones: 6.1 a 6.3	Ídem cuarta edición
La integral de trayectoria Integrales de línea Superficies parametrizadas área de una superficie Integrales de funciones escalares sobre superficies Integrales de superficie de funciones vectoriales	Capítulo 7 secciones: todas	Capítulo 7 secciones: todas excepto 7.7

Tabla de contenidos

* Esta parte es de la sección 2.4 del capítulo 2

Capítulo 3. Derivadas de orden superior, máximos y mínimos

3.3 Extremos de funciones con valores reales

En esta sección se establece un método para calcular máximos y mínimos, tanto relativos como absolutos, de funciones escalares (o campos escalares) es decir, funciones que van de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

Extremos relativos

En primer lugar se proporciona la definición de máximo local, mínimo local, extremo local o relativo, punto crítico y punto silla.

Los conceptos de máximo y mínimo local o relativo amplían los conceptos correspondientes para funciones de una variable. Para el caso de una función de dos variables, el significado geométrico es que corresponde al "punto más alto" en el caso de un *máximo* y al "punto más bajo" en el caso de un *mínimo* de "alguna parte" de la gráfica de la función. El dibujo de la página 200 (191) ilustra apropiadamente estos conceptos. En general, un máximo relativo corresponde a un punto cuya imagen es mayor o igual que todas las imágenes en un cierto entorno y un mínimo relativo es aquel cuya imagen es menor o igual que todas las imágenes en un entorno.

A continuación, en el texto, se enuncia el teorema 4 que dice que si la función f es diferenciable, entonces sus puntos extremos relativos (ya sean máximos o mínimos) deben buscarse entre aquellos que hacen que el gradiente de la función se anule. Esto dice que si, por ejemplo, f es una función de dos variables, entonces los *posibles* puntos máximos o mínimos relativos son aquellos puntos (x, y) tales $\triangledown f(x, y) = (0, 0)$. Dicho de otro modo, estos puntos deben buscarse entre las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Note que se dice "posibles"; con esto se indica que los puntos solución del sistema pueden o no ser extremos relativos. Mientras tanto, los puntos que no son solución de dicho sistema no pueden ser extremos. Esto explica el nombre de *puntos críticos* que se da a las soluciones de dicho sistema.

Los puntos que son soluciones de dicho sistema pero que no son extremos relativos son los que los que se denominan *puntos silla*. El significado geométrico, para funciones de dos variables, de los puntos silla, está bien ilustrado en el dibujo de la página 202 (192).

Otro resultado importante que debe considerarse en esta sección es el teorema 6. Este proporciona un método para determinar cuándo un punto crítico de una función de dos variables corresponde a un máximo o a un mínimo. Observe que este teorema establece que (x_0, y_0) es un mínimo relativo cuando es un punto crítico y además cumple dos cosas: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ es positivo y $D(x_0, y_0)$ también es positivo. También dice que (x_0, y_0) es un mínimo relativo cuando es un punto crítico y además cumple que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ es negativo y $D(x_0, y_0)$ es positivo. Por otra parte, si $D(x_0, y_0)$ es negativo entonces (x_0, y_0) es un punto de silla.

¿Qué sucede cuando $D(x_0, y_0) = 0$? El teorema no responde; el punto puede ser máximo, mínimo o de silla, pero esto solo se puede saber de alguna otra manera en cada caso particular.

Nota: En la cuarta edición, en este teorema, aparece un error; falta un exponente 2 en uno de los términos del discriminante. Debe leerse:

$$D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2.$$

Extremos absolutos

Puede decirse que un mínimo absoluto es el punto que tiene la menor imagen, bajo la función, de todos los del dominio; por el contrario, un máximo absoluto es el que tiene la mayor imagen de todos los elementos del dominio.

Observe la diferencia entre máximo relativo y máximo absoluto; el relativo tiene la mayor imagen con respecto a una "parte" del dominio, mientras que el absoluto tiene la mayor imagen con respecto a "todo" el dominio. Un comentario análogo vale para el caso de mínimo relativo y mínimo absoluto.

Lo anterior NO impide, desde luego, que un máximo relativo pueda ser también absoluto (lo mismo, un mínimo relativo también puede ser mínimo absoluto).

El teorema 7 es muy importante porque establece que si el dominio de la función es cerrado y acotado, entonces la función va a tener un máximo y un mínimo. Cuando se dice máximo o mínimo sin más, se refiere a máximo o mínimo absoluto.

En la página 213 (203), se establece un método para hallar los puntos de máximo y mínimo absolutos en una región con frontera.

Cuando se considera que el domino A de una función de dos o más variables es un conjunto cerrado y acotado, éste está formado por su interior (que podría ser vacío) que es abierto y por su frontera (que es un conjunto cerrado). El método para encontrar los extremos de la función definida en A consiste en:

- Localizar los puntos críticos de f en el interior del dominio A.
- Localizar los puntos críticos de la función considerada solo en la frontera de A.
- Calcular la imagen de todos los puntos obtenidos en los dos pasos anterior.
- Comparar los valores obtenidos en el punto anterior. El mayor corresponde al punto máximo y el menor corresponde al punto mínimo.

Observaciones

- El material que se expone entre las páginas 203 y 207 (194 y 198) se refiere a un concepto (el hessiano) que permite determinar si un punto crítico es máximo o mínimo relativo, sin embargo, no forma parte de los contenidos del curso.
- De la lista de ejercicios de esta sección HACER los ejercicios del 1 al 35, para ambas ediciones.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, páginas de la 214 a la 217 (204 a la 207)

1. Hallar los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ y determinar si son máximos o mínimos relativos, o corresponden a puntos silla.

Solución: Para determinar los puntos críticos se debe resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x$, entonces, el sistema a resolver es

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Dado que este es un sistema lineal homogéneo y el determinante de la matriz de coeficientes es $3 \neq 0$, entonces, la única solución del sistema es $(0,0)$. Este es el único punto crítico de la función.

Ahora es necesario averiguar qué tipo de punto es. Para esto, se aplica el teorema 5. Se calcula la segunda derivada parcial con respecto a x y se evalúa en $(0,0)$. En este caso $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$. Como es constante, al evaluar en $(0,0)$ se obtiene el mismo valor: 2.

Ahora se requiere calcular la segunda derivada parcial con respecto a y: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ y la segunda derivada mixta: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -1$. Al evaluar en $(0,0)$ se obtienen los mismos resultados puesto que todas estas derivadas son constantes. Así, el discriminante es:

$$D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0.$$

Como D es positivo y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ también es positivo, entonces $(0,0)$ corresponde a un mínimo.

2. Hallar los puntos críticos de la función $f(x,y) = (x-y)(xy-1)$ y determinar si son máximos o mínimos relativos, o corresponden a puntos silla.

   Solución: Primero se desarrolla el producto: $f(x,y) = x^2y - x - xy^2 + y$.

   Luego se calculan las derivadas parciales y se igualan a 0:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 1 - y^2 = 0 \tag{1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy + 1 = 0 \tag{2}$$

De la segunda ecuación se concluye que $x \neq 0$, por lo tanto, es posible despejar y en ella: $y = \dfrac{x^2+1}{2x}$.
Después se sustituye esto en la primera ecuación y se obtiene:

$$2x \cdot \frac{x^2+1}{2x} - 1 - \left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 - 1 - \frac{x^4+2x^2+1}{4x^2} = 0$$

Se debe simplificar esta suma y calcular el numerador para solo igualar a cero este numerador. Al calcularlo se obtiene

$$\begin{aligned} &4x^4 - x^4 - 2x^2 - 1 = 0 \\ \Rightarrow &3x^4 - 2x^2 - 1 = 0 \\ \Rightarrow &(3x^2+1)(x+1)(x-1) = 0 \end{aligned}$$

De la última ecuación se obtienen las soluciones reales $x = 1$ o $x = -1$ que en ninguno de los casos anula el denominador de la expresión original. Para determinar los puntos críticos, se sustituyen los valores de x encontrados en la ecuación $2xy - 1 - y^2 = 0$.

Sustituyendo $x = 1$ en (1) se obtiene $2y - 1 - y^2 = 0$; es decir $-(y-1)^2 = 0$ y, por lo tanto, $y = 1$. Esto da un primer punto crítico: $(1, 1)$.

Sustituyendo $x = -1$ en (1) se consigue $-2y - 1 - y^2 = 0$; es decir $-(y+1)^2 = 0$ y, por lo tanto, $y = -1$. Esto da un segundo punto crítico: $(-1, -1)$. Dado que no hay más valores que anulan las derivadas parciales, entonces solo hay estos dos puntos críticos.

Ahora se calculan las derivadas parciales segundas para utilizar el teorema correspondiente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2x - 2y.$$

De aquí se tiene que

$$D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = (2y)(-2x) - (2x-2y)^2 = -4x^2 - 4y^2 + 4xy.$$

Como $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2 > 0$, y $D(1,1) = -4 < 0$, entonces, $(1, 1)$ es un punto de silla.

Por otra parte $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -2 < 0$ y $D(-1,-1) = -4 < 0$, entonces, $(-1,-1)$ también es un punto de silla.

3. Considere la función $f(x,y) = (y-3x^2)(y-x^2)$.

   (a) Compruebe que $(0,0)$ es un punto crítico.

   (b) Si $g(t) = f(at,bt)$ tiene un punto mínimo para $t=0$ para todo $a,b \in \mathbb{R}$.

   (c) Demuestre que $(0,0)$ no es un punto mínimo relativo de f.

Solución: La función es $f(x,y) = (y-3x^2)(y-x^2)$ y desarrollando: $f(x,y) = y^2-4x^2y+3x^4$. Ahora

(a) Se pide verificar que $(0,0)$ (el origen) es un punto crítico. Dado que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -8xy + 12x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4x^2,$$

vemos que si se hace $x=0$, $y=0$ entonces ambas derivadas se anulan. Luego, $(0,0)$ es un punto crítico.

Observe que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -8y + 36x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -8x$$

Luego $D = (-8y+36x^2)(2) - (-8x)^2 = 8x^2 - 16y$. Así, al evaluar D en $(0,0)$ se obtiene $D(0,0) = 0$, por lo que el teorema no se aplica.

(b) Primero se evalúa f en (at,bt); se obtiene:

$$f(at,bt) = (bt)^2 - 4(at)^2(bt) + 3(at)^4 = b^2t^2 - 4a^2t^3b + 3a^4t^4.$$

Esto proporciona una función en una sola variable (la variable t). Si se deriva e iguala a 0 se obtendrán los puntos críticos (curso de Cálculo Diferencial, código 175):

$$f'(at,bt) = 2b^2t - 12a^2t^2b + 12a^4t^3.$$

Note que $t=0$ es un punto crítico.

Si se calcula la segunda derivada:

$$f''(at,bt) = 36a^4t^2 - 24a^2bt + 2b^2,$$

y al evaluarla en $t=0$ se obtiene $2b^2$ que es un número positivo. Entonces, tiene un mínimo en $t=0$. Se concluye que f tiene un mínimo relativo en cada recta que pasa por $(0,0)$.

(c) Lo anterior parece indicar que $(0,0)$ es un mínimo relativo de f, pero no es así. Para que fuese un mínimo debería serlo para cualquier trayectoria que pase por el origen, no solo para las rectas. Por ejemplo, considere la trayectoria dada por $(t, 2t^2)$ (cuando $t = 0$, la trayectoria pasa por $(0, 0)$). Se tienen $f(t, 2t^2) = (2t^2)^2 - 4(t)^2(2t^2) + 3(t)^4 = 4t^4 - 8t^4 + 3t^4 = -t^4$. Puesto que para cualquier valor de $t \neq 0$ se tiene que $-t^4 < 0$, entonces esta función tiene un máximo en $t = 0$. Por lo que f tiene un máximo en $(0, 0)$ cuando toma valores sobre la trayectoria $(t, 2t^2)$. Esto significa que $(0, 0)$ no es un mínimo relativo de f.

4. Hallar el punto del plano $2x - y + 2z = 20$ más próximo al origen.

   Solución: Este ejercicio se puede resolver de forma más eficiente utilizando el método de multiplicadores de Lagrange que se estudia en la siguiente sección. Sin embargo, se puede hacer usando el método de esta sección.

   El ejercicio proporciona la ecuación de un plano: $2x - y + 2z = 20$ y pide determinar cuál de sus puntos está más cerca del origen (esto es, del punto $(0, 0, 0)$). "Más cerca" se refiere a un mínimo; ¿cuál es la función que hay que minimizar? Se está hablando de una distancia, y la distancia de un punto cualquiera (x, y, z) al origen es $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Pero no se consideran todos los puntos sino solo los que están en el plano mencionado. Despejando z en la ecuación del plano se obtiene $z = 10 - x + \frac{1}{2}y$. Sustituyendo en la función de distancia d se tiene una función de dos variables:

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + (10 - x + \frac{1}{2}y)^2} = \sqrt{2x^2 + \frac{5}{4}y^2 - xy - 20x + 10y + 100}$$

   Minimizar la función d es lo mismo que minimizar la función d^2, que, por comodidad, llamaremos E:

$$E(x, y) = 2x^2 + \frac{5}{4}y^2 - xy - 20x + 10y + 100$$

   Calculando las derivadas parciales e igualando a 0 se obtiene:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4x - y - 20 = 0$$
$$\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{5}{2}y - x + 10 = 0$$

   Resolviendo el sistema se tiene que $x = \frac{40}{9}$, $y = -\frac{20}{9}$. Se deja a usted los cálculos de las segundas derivadas y la aplicación del teorema correspondiente para verificar que en ese punto hay un mínimo.

   Para los valores obtenidos de x, y, el valor de z es

$$z = 10 - x + \frac{1}{2}y = 10 - \frac{40}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-20}{9} = \frac{40}{9}$$

Así, el punto, en el plano dado, que se encuentra más cerca del origen es $\left(\frac{40}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{40}{9}\right)$.

5. Hallar los valores máximo y el mínimo absolutos de $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \cos y$ en el rectángulo $R = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Solución: Primero se determinan los puntos críticos en el interior de la región que corresponde al rectángulo R indicado (vea la figura adjunta). Hacemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{sen} y = 0$$

Pero $\cos x = 0$ si $x = \frac{1}{2}\pi$ o $x = \frac{3}{2}\pi$ (solo se toman estos dos porque x está entre 0 y 2π).

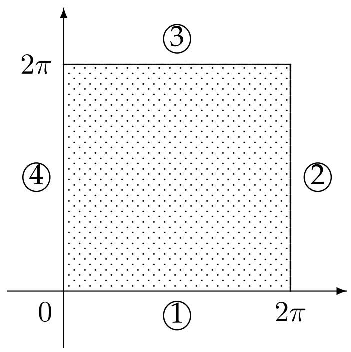

Figura 1: Región para extremos.

Además, $-\operatorname{sen} y = 0$, cuando $y = 0$, $y = \pi$ (por una razón análoga a la anterior, solo se toman esos dos valores). Así, se concluye que los puntos críticos son $\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$ y $\left(\frac{3}{2}\pi, \pi\right)$. Se observa que hay dos puntos de estos en la frontera (los que tienen 0 como segunda coordenada) y, entonces solo quedan los otros dos como puntos críticos en el interior de la región.

Ahora se determinan los puntos críticos en la frontera; para ello se considera cada uno de los cuatro lados del cuadrado.

El lado señalado con ① en la figura corresponde a los puntos de la forma $(x, 0)$, con x entre 0 y 2π. De modo que al evaluar la función queda de una sola variable:

$$f(x, 0) = \operatorname{sen} x + \cos 0 = \operatorname{sen} x + 1.$$

Derivando se tiene $(\operatorname{sen} x + 1)' = \cos x$, que se hace 0 cuando $x = \frac{1}{2}\pi$ o $x = \frac{3}{2}\pi$. Se obtienen así dos puntos críticos: $\left(\frac{1}{2}\pi, 0\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, 0\right)$.

El lado señalado con ② en la figura corresponde a los puntos de la forma $(2\pi, y)$, con y entre 0 y 2π. De modo que al evaluar la función queda de una sola variable:

$$f(2\pi, y) = \operatorname{sen} 2\pi + \cos y = \cos y.$$

Derivando se tiene $(\cos y)' = -\operatorname{sen} y$, que se hace 0 cuando $y = 0$, $y = \pi$ o $y = 2\pi$. Se obtienen así tres puntos críticos: $(2\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(2\pi, 2\pi)$.

El lado señalado con ③ en la figura corresponde a los puntos de la forma $(x, 2\pi)$, con x entre 0 y 2π. De modo que al evaluar la función queda de una sola variable:

$$f(x, 2\pi) = \operatorname{sen} x + \cos 2\pi = \operatorname{sen} x - 1.$$

Derivando se tiene $(\operatorname{sen} x - 1)' = \cos x$, que se hace 0 cuando $x = \dfrac{1}{2}\pi$ o $x = \dfrac{3}{2}\pi$. Se obtienen así otros dos puntos críticos: $\left(\dfrac{1}{2}\pi, 2\pi\right)$, $\left(\dfrac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$.

Finalmente, el lado señalado con ④ en la figura corresponde a los puntos de la forma $(0, y)$, con $0 \leq y \leq 2\pi$. De modo que al evaluar la función queda de una sola variable:

$$f(0, y) = \operatorname{sen} 0 + \cos y = \cos y.$$

Derivando se tiene $(\cos y)' = -\operatorname{sen} y$, que se hace 0 cuando $y = 0$, $y = \pi$ o $y = 2\pi$. Se obtienen así tres nuevos puntos críticos: $(0, 0)$, $(0, \pi)$ y $(0, 2\pi)$. En total hay 12 puntos críticos. Hay que evaluar f en cada uno de ellos:

$$\begin{array}{ll}
f(\frac{1}{2}\pi, \pi) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi + \cos \pi = 0 & f(\frac{3}{2}\pi, \pi) = \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi + \cos \pi = -2 \\
f(\frac{1}{2}\pi, 0) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi + \cos 0 = 2 & f(\frac{3}{2}\pi, 0) = \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi + \cos 0 = 0 \\
f(2\pi, 0) = \operatorname{sen} 2\pi + \cos 0 = 1 & f(2\pi, \pi) = \operatorname{sen} 2\pi + \cos \pi = -1 \\
f(2\pi, 2\pi) = \operatorname{sen} 2\pi + \cos 2\pi = 1 & f(\frac{1}{2}\pi, 2\pi) = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi + \cos 2\pi = 2 \\
f(\frac{3}{2}\pi, 2\pi) = \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi + \cos 2\pi = 0 & f(0, 0) = \operatorname{sen} 0 + \cos 0 = 1 \\
f(0, \pi) = \operatorname{sen} 0 + \cos \pi = -1 & f(0, 2\pi) = \operatorname{sen} 0 + \cos 2\pi = 1
\end{array}$$

El valor máximo de la función es 2 este se alcanza en los puntos $\left(\dfrac{1}{2}\pi, 0\right)$ y $\left(\dfrac{1}{2}\pi, 2\pi\right)$ y el mínimo es -2 que se alcanza en el punto $\left(\dfrac{3}{2}\pi, \pi\right)$.

6. Un pentágono está compuesto por un rectángulo y un triángulo isósceles. Si la longitud del perímetro está dada, hallar la máxima área posible.

Solución: La función a maximizar es la función determinada por el área de la figura, que es $A = xy + \dfrac{1}{2}yh$, donde h es la altura del triángulo. De acuerdo con la trigonometría, $h = \dfrac{1}{2}y \tan\theta$. Según esto,

$$A = xy + \frac{1}{4}y^2 \tan\theta. \tag{3}$$

Por otra parte, el perímetro es $P = 2x + y + 2r$, donde r es la medida de los lados iguales del triángulo isósceles.

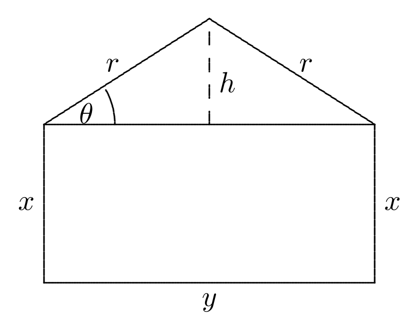

Figura 2: Maximizar el área.

Según el enunciado, P es constante, por trigonometría se sabe que $r = \frac{y}{2}\frac{1}{\cos\theta}$ o en forma equivalente $r = \frac{1}{2}y\sec\theta$. Luego, $P = 2x + y + y\sec\theta$. De aquí se despeja a x:

$$x = \frac{1}{2}\left(P - y - y\sec\theta\right),$$

y, sustituyendo en (3), se obtiene el área como una función de dos variables, y, θ (recuerde que P es constante):

$$\begin{aligned} A(y,\theta) &= \frac{1}{2}\left(P - y - y\sec\theta\right)y + \frac{1}{4}y^2\tan\theta \\ &= \frac{1}{2}Py - \frac{1}{2}y^2(1 + \sec\theta - \frac{1}{2}\tan\theta). \end{aligned}$$

Ahora se calculan las derivadas parciales y se igualan a 0 para determinar los puntos críticos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial\theta} &= -\frac{1}{2}y^2(\tan\theta\sec\theta - \frac{1}{2}\sec^2\theta) = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial y} &= \frac{1}{2}P - y(1 + \sec\theta - \frac{1}{2}\tan\theta) = 0 \end{aligned}$$

Como $y \neq 0$, de la primera ecuación se obtiene $\tan\theta\sec\theta - \frac{1}{2}\sec^2\theta = 0$ y, por lo tanto $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$; es decir, por las condiciones del problema, $\theta = \frac{1}{6}\pi$. Sustituyendo en la segunda ecuación y despejando se obtiene que $y = \left(2 - \sqrt{3}\right)P$. Evaluando la función de área A en $\left((2-\sqrt{3})P, \frac{1}{6}\pi\right)$, se tiene que el área máxima es

$$A = \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{3}\right)P^2.$$

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 1 a 4 determine los puntos críticos de la función dada y clasifíquelos como máximos o mínimos relativos o puntos de silla.

1. $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^4$
2. $f(x,y) = (x-4)\ln(xy)$
3. $f(x,y) = -x^3 + 9x - 4y^2$
4. $f(x,y) = xy + \frac{4}{x} + \frac{4}{y}$
5. Considere $f(x,y) = 2x^2 - y^2$, halle el máximo y mínimo absoluto de f en el disco unitario $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

6. Determine el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$, en el cuadrado $R = [0,2] \times [0,2]$.
7. Determine la distancia mínima entre el punto $(1,2,0)$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$.
8. Encuentre los valores máximos y mínimos de $f(x,y) = y^2 - x^2$ sobre el triángulo cerrado cuyos vértices son $(0,0)$, $(1,2)$ y $(2,-2)$.

3.4 Extremos restringidos y multiplicadores de Lagrange

En esta sección se estudia un método para encontrar máximos y mínimos de funciones con ciertas restricciones sobre el dominio de la función. Interesa, en particular que usted comprenda el teorema que sustenta el método de *multiplicadores de Lagrange* para calcular los puntos críticos de una función f con ciertas restricciones. Este teorema es el número 8 y se encuentra en la página 218. (209. Teorema 9)

Con las hipótesis dadas en el teorema correspondiente, se establece es que si se quiere maximizar o minimizar la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ sujeta a la restricción $g(x_1, \ldots, x_n) = c$, entonces, para determinar los puntos críticos, debe resolverse el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \\
&\vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} \\
g(x_1, \ldots, x_n) &= c
\end{aligned}$$

Si el sistema se resuelve por completo entonces se determinarán valores de $x_1, \ldots, x_n, \lambda$. Los valores importantes son los de las equis; el valor de λ (llamado multiplicador de Lagrange) solamente es auxiliar e incluso puede darse el caso de que se encuentren los puntos críticos sin encontrar λ en forma explícita.

El método proporciona los puntos críticos pero NO indica cuáles son máximos o mínimos. Usualmente la naturaleza del problema permite saber, sin muchas dificultades, cuáles son máximos o mínimos. Finalmente, pueden presentarse dos restricciones de la forma $g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0$ y $g_2(x_1, \ldots, x_n) = 0$. En ese caso, para determinar los puntos críticos, se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \\
\frac{\partial f}{\partial x_2} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \\
&\vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n} &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\
g_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\
g_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0
\end{aligned}$$

A partir de aquí es evidente como se procedería si hubiera tres restricciones o más.

Observaciones

- La estrategia de multiplicadores de Lagrange para encontrar máximos o mínimos absolutos en regiones con frontera, NO se estudiará. Tampoco la sección "Criterio de la segunda derivada para extremos condicionados".
- La lista de ejercicios recomendados de la sección son del 1 al 22.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, páginas de la 234 a la 237 (223 a la 225)

1. Hallar los extremos de $f(x,y) = x - y$ sujeto a la restricción $x^2 - y^2 = 2$.
   Solución: Si se hace $g(x,y) = x^2 - y^2 - 2$, la restricción es $g(x,y) = 0$ y el sistema a resolver es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\
g(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

   Es decir, calculando las derivadas parciales correspondientes:

$$1 = \lambda(2x) \tag{4}$$
$$-1 = \lambda(-2y) \tag{5}$$
$$x^2 - y^2 - 2 = 0 \tag{6}$$

De (4) se puede ver que $\lambda \neq 0$. De (4) y (5) se tiene que $\lambda(2x) = \lambda(2y)$, por lo tanto, $x = y$. Sustituyendo en (6), se tiene $x^2 - x^2 - 2 = 0$, pero esta ecuación es equivalente a $-2 = 0$ y, entonces, no tiene soluciones. Esto quiere decir que no existen tales máximos y mínimos.

2. Determinar los extremos relativos de $f(x,y) = x^2 - y^2$, sujeto a la restricción $y = \cos x$.

   Solución: Aquí $g(x,y) = y - \cos x$, pues se busca que los puntos que cumplen con la restricción satisfagan la ecuación $g(x,y) = 0$. Calculando las derivadas parciales correspondientes se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x = \lambda(\operatorname{sen} x) \tag{7}$$

$$-2y = \lambda(1) \tag{8}$$

$$y = \cos x \tag{9}$$

   De (8) y (9) se tiene que $\lambda = -2\cos x$ y, entonces, sustituyendo en (7): $x = \cos x \operatorname{sen} x$. Una solución de esta ecuación es $x = 0$. Esta es la única pues cualquier solución debería satisfacer $x \in]-1,1[$ (dado que $-1 < \cos x \operatorname{sen} x < 1$; pero si $0 < x < 1$, entonces $-x$ es negativa mientras que $\cos x \operatorname{sen} x$ es positiva y, si $-1 < x < 0$, entonces $-x$ es positiva mientras que $\cos x \operatorname{sen} x$ es negativa). Concluimos que el único valor posible para x es 0 y, en ese caso, $y = \cos 0 = 1$. El único punto crítico es $(0,1)$.

   Evaluando la función en ese punto se tienen $f(0,1) = 0^2 - 1^2 = -1$ y este es un mínimo. La prueba de que es mínimo es la siguiente: para los puntos en el conjunto S dado se tiene $f(x,y) = f(x,\cos x) = x^2 - \cos^2 x$; pero $x^2 - \cos^2 x \geq x^2 - 1 \geq -1$.

3. Hallar los máximos y mínimos absolutos para $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ en el disco unitario $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   Solución: Hay que determinar los puntos críticos en el interior de D y los puntos críticos en su frontera. Los de la frontera se pueden encontrar usando multiplicadores de Lagrange, donde la restricción está dada por $x^2 + y^2 = 1$. Hay que resolver el sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad 2x + y = \lambda(2x) \tag{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad 2y + x = \lambda(2y) \tag{11}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{12}$$

   De (10) se tiene que $y = 2(\lambda - 1)x$; sustituyendo en (11) se tiene:

$$4(\lambda - 1)x + x = 4\lambda(\lambda - 1)x$$

   De aquí, $x(-4(\lambda - 1)^2 + 1) = 0$. Hay dos posibilidades:

- Si $x = 0$, entonces, por (12), $y^2 = 1$ y, por lo tanto, $y = 1$, $y = -1$. De aquí resultan dos puntos críticos $(0, 1)$ y $(0, -1)$.
- Si $-4(\lambda - 1)^2 + 1 = 0$, entonces $(\lambda - 1)^2 = \dfrac{1}{4}$ y, por lo tanto, $\lambda = \dfrac{3}{2}$, $\lambda = \dfrac{1}{2}$.
  - Si se hace $\lambda = \dfrac{3}{2}$ en (10) se tiene que $x = y$ y, sustituyendo en (12), $2x^2 = 1$. Resulta entonces que $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Obteniéndose otros dos puntos críticos: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
  - Si se hace $\lambda = \dfrac{1}{2}$ en (11) se tiene que $-x = y$ y, sustituyendo en (12), $2x^2 = 1$. Resulta entonces que $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Obteniéndose otros dos puntos críticos: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ahora hay que determinar los puntos críticos en el interior del disco. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 &\quad \Rightarrow \quad 2x + y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 &\quad \Rightarrow \quad x + 2y = 0 \end{aligned}$$

La única solución de esta sistema es $x = 0$, $y = 0$, por lo que $(0, 0)$ es otro punto crítico.

Finalmente, evaluamos en todos los puntos críticos para ver cuál es el máximo y cuál es el mínimo:

(x, y)	$(0, 1)$	$(0, -1)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$(0, 0)$
$f(x, y)$	1	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

La más pequeña de estas imágenes es 0; este es el mínimo. La más grande es $\dfrac{3}{2}$, este es el máximo.

4. Un servicio de mensajería exige que las dimensiones de una caja rectangular cumpla con que el largo más el doble del ancho más el doble de la altura no sobrepase los 108 cm. ¿Cuál es la capacidad de la caja de mayor volumen que se puede conseguir con esta condición?

   Solución: El volumen de la caja es $V = lwh$ y esta es la función a maximizar donde l es el largo, w el ancho y h la altura. La restricción es $l + 2w + 2h = 108$ (en el interior el único punto crítico es $(0, 0, 0)$, pero esto no corresponde a las dimensiones de una caja). Se debe resolver el sistema:

$$\begin{aligned} wh &= \lambda \\ lh &= 2\lambda \\ lw &= 2\lambda \\ l + 2w + 2h &= 108 \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones se obtiene que $l = 2w$; de la segunda y la tercera se tiene que $h = w$. Sustituyendo en la última de la ecuaciones: $2w + 2w + 2w = 108$, por lo que $w = 18$. Entonces, $l = 36$ y $h = 18$. El punto crítico es $(36, 18, 18)$. Puesto que el conjunto de puntos que satisfacen la restricción es cerrado y acotado, entonces V alcanza un máximo y un mínimo. Dado que el mínimo es 0, entonces el máximo es $V(36, 18, 18) = 11\,664$. El volumen de la caja más grande que puede enviar la compañía es $11\,664$ centímetros cúbicos.

Ejercicios propuestos

1. Use multiplicadores de Lagrange para determinar el máximo y el mínimo de $f(x, y) = y^2 - x^2$ sujeto a la restricción $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$.
2. Maximice $f(x, y) = x^2 - 2y - y^2$ sujeto a $x^2 + y^2 = 1$.
3. Minimice $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.
4. Encuentre el máximo valor de $f(x, y, z) = x - y + z$ sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.
5. Encuentre el máximo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a las dos restricciones: $x + y = 4$, $y + z = 6$.
6. Utilize multiplicadores de Lagrange para encontrar el punto en el plano $2x + y + z = 1$ más cercano al origen.

Capítulo 4. Funciones con valores vectoriales

2.4 y 4.1 Introducción a las trayectorias y curvas, aceleración y segunda ley de Newton

Es conveniente trabajar juntas las secciones [2.4 y 4.1], aunque en el libro se encuentren separadas. De esta forma integraremos dos temas que están muy relacionados como son la velocidad y la aceleración. Es importante visualizar una curva como la trayectoria que sigue una partícula cuando se desplaza en el plano o en el espacio. Esta trayectoria será, entonces, una función del tiempo.

Por esta razón se define una trayectoria como una función de t, donde t varía en un intervalo y las imágenes son elementos de $\mathbb{R}^n$ (si $n = 2$ se tiene una trayectoria en el plano, si $n = 3$ se tiene una trayectoria en el espacio). La "traza" o "dibujo" de las imágenes genera una *curva*.

También es importante hacer notar que a cada trayectoria, en la forma que la define el texto, le corresponde una única curva, pero dada una curva, ésta puede ser descrita por múltiples trayectorias.

Por ejemplo, considere el arco de la parábola dada por la ecuación $y = x^2$, que va del punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$. Las dos trayectorias siguientes producen este arco:

$$\begin{aligned} \sigma : [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, t^2) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \gamma : [0,2] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{1}{2}t, \frac{1}{4}t^2\right) \end{aligned}$$

Note que ambas producen el mismo arco:

Para σ: $\sigma(t) = (t, t^2)$. Si se hace $x = t$, $y = t^2$, entonces $y = x^2$. Por otra parte $\sigma(0) = (0,0)$ y $\sigma(1) = (1,1)$. En síntesis, la trayectoria corresponde al arco de parábola indicado.

Para γ: $\gamma(t) = \left(\frac{1}{2}t, \frac{1}{4}t^2\right)$. Si se hace $x = \frac{1}{2}t$, $y = \frac{1}{4}t^2$, entonces, también en este caso $y = x^2$. Por otra parte $\gamma(0) = (0,0)$ y $\gamma(2) = (1,1)$. Esto significa que también esta trayectoria corresponde al arco de parábola indicado.

Derivada, velocidad, rapidez y aceleración

Se define la *derivada de una trayectoria* mediante la derivada de sus coordenadas. Por ejemplo, si $\sigma(t) = (t^2, 2t)$, entonces $\sigma'(t) = ((t^2)', (2t)') = (2t, 2)$.

Se dice que la derivada de una trayectoria en cada punto t, es la *velocidad* en cada punto de una partícula que siguiera esa trayectoria. La segunda derivada recibe el nombre de *aceleración* de la partícula. Además, la norma de la derivada se llama *rapidez* de la partícula.

Por ejemplo, para $\sigma(t) = (t^2, 2t)$, en cada punto:

- La velocidad es $v(t) = \sigma'(t) = (2t, 2)$
- La aceleración es $a(t) = v'(t) = \sigma''(t) = (2, 0)$
- La rapidez es $\|v(t)\| = \|(2t, 2)\| = \sqrt{4t^2 + 4}$

El texto proporciona en la página 141, sección 2.4 (131), una fórmula para describir la recta tangente a una curva en un punto dado.

Algunas veces se dice que la curva correspondiente a una trayectoria σ es suave si σ es de clase C^1; esto es, tanto σ como su derivada son diferenciables en el interior del intervalo en el que están definidas y por lo tanto, son funciones continuas.

Un aplicación sumamente útil, corresponde a la **Segunda ley de Newton** que se reduce a escribir: *Fuerza es igual a masa por la aceleración*, que en el caso de una partícula que se mueva bajo la influencia de un campo de fuerza $\mathbf{F}$ en una curva $\sigma(t)$ se escribe:

$$\mathbf{F}(\sigma(t)) = m\sigma''(t)$$

Se sugiere la realización de los ejercicios de las secciones 2.4 y 4.1. del 1 al 20 y del 1 al 19 respectivamente.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, de la página 143 (132-133) y de las páginas 265-266 (254-255)

1. Calcule la velocidad, la aceleración y la ecuación de la recta tangente a $\sigma(t) = (t \operatorname{sen} t, 4t)$ en $t = 0$ [*ejercicio modificado de la lista*].
   Solución: La velocidad en t es $v(t) = \sigma'(t) = (\operatorname{sen} t + t\cos t, 4)$. En $t = 0$ es $v(0) = (0, 4)$.

   La aceleración en t es $a(t) = \sigma''(t) = (2\cos t - t \operatorname{sen} t, 0)$. En $t = 0$ es $a(0) = (2, 0)$.

   Dado que $\sigma(0) = (0, 0)$ y $\sigma'(0) = (0, 4)$, entonces la ecuación de la recta tangente cuando $t = 0$ es
   $$(x, y) = (0, 0) + \lambda(0, 4).$$

2. Hallar una trayectoria σ tal que $\sigma(0) = (0, -5, 1)$ y $\sigma'(t) = (t, e^t, t^2)$.
   Solución: Si $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, entonces se tiene que
   $$\begin{aligned} \sigma_1'(t) = t \quad &\Rightarrow \quad \sigma_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1 \\ \sigma_2'(t) = e^t \quad &\Rightarrow \quad \sigma_2(t) = e^t + c_2 \\ \sigma_3'(t) = t^2 \quad &\Rightarrow \quad \sigma_3(t) = \frac{1}{3}t^3 + c_3 \end{aligned}$$
   donde c_1, c_2 y c_3 son constantes que se obtienen de $\sigma(0) = (0, -5, 1)$. De lo anterior, $\sigma_1(0) = 0$, es decir $\frac{1}{2}0^2 + c_1 = 0$, entonces $c_1 = 0$. También, $\sigma_2(0) = -5$, es decir $e^0 + c_2 = -5$, luego, $1 + c_2 = -5$, entonces $c_2 = -6$. Finalmente, $\sigma_3(0) = 1$, es decir $\frac{1}{3}0^3 + c_3 = 1$, entonces $c_3 = 1$. Se concluye que $\sigma(t) = \left(\frac{1}{2}t^2, e^t - 6, \frac{1}{3}t^3 + 1\right)$.

3. Una partícula que se mueve sobre la curva $c(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$ se sale por la tangente en $t = 2$. Determine cuál es la posición de la partícula en $t = 3$.
   Solución: Primero se calcula el vector velocidad para luego encontrar la ecuación de la recta tangente y con ésta determinar la posición.
   $$v(t) = c'(t) = (2t, 3t^2 - 4, 0) \Rightarrow v(2) = (4, 8, 0)$$
   Se sabe que $c(2) = (4, 0, 0)$, así la ecuación vectorial $l(\lambda) = (4, 0, 0) + \lambda(4, 8, 0)$ corresponde a la recta tangente y en $t = 3$ equivale a encontrar la posición sobre la recta en $\lambda = 1$, de esta forma la partícula se encuentra en $(8, 8, 0)$.

4. Una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ y cuando $t = 1$ se sale por una tangente, ¿dónde está en $t = 2$?

Solución: Una vez que la partícula abandona la trayectoria sigue a lo largo de la recta tangente a la curva en el punto donde $t = 1$. Entonces, es preciso determinar la ecuación de dicha recta.

Un punto en la recta es el punto $\sigma(1) = (e, e^{-1}, \cos 1)$. Un vector director de la recta está dado por $\sigma'(1)$; pero $\sigma'(t) = (e^t, -e^{-t}, -\operatorname{sen} t)$, por lo que $\sigma'(1) = (e, -e^{-1}, -\operatorname{sen} 1)$. Así, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente a $t = 1$ es:

$$L(t) = t(e, -e^{-1}, -\operatorname{sen} 1) + (e, e^{-1}, \cos 1).$$

Para saber dónde está la partícula en $t = 2$ hay que notar que solo ha estado una unidad de tiempo sobre la recta, de modo que cuando $t = 2$, la partícula se encuentra en el punto:

$$L(1) = (e, -e^{-1}, -\operatorname{sen} 1) + (e, e^{-1}, \cos 1) = (2e, 0, \cos 1 - \operatorname{sen} 1).$$

5. Probar que $\dfrac{d}{dt}[\sigma(t) \times \rho(t)] = \dfrac{d\sigma}{dt} \times \rho(t) + \sigma(t) \times \dfrac{d\rho}{dt}$, donde σ y ρ son trayectorias diferenciables en $\mathbb{R}^3$.
Solución: En primer lugar, observe que esta propiedad tiene una analogía con la regla de la derivada de un producto para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Si $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ y $\rho(t) = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$; entonces

$$\sigma \times \rho = (\sigma_2\rho_3 - \sigma_3\rho_2, \sigma_3\rho_1 - \sigma_1\rho_3, \sigma_1\rho_2 - \sigma_2\rho_1),$$

luego, dado que las funciones componentes son reales de variable real, se aplican las correspondientes propiedades de la derivada:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\sigma \times \rho] &= \left(\frac{d}{dt}(\sigma_2\rho_3 - \sigma_3\rho_2), \frac{d}{dt}(\sigma_3\rho_1 - \sigma_1\rho_3), \frac{d}{dt}(\sigma_1\rho_2 - \sigma_2\rho_1)\right) \\
&= \left(\frac{d\sigma_2}{dt}\rho_3 + \sigma_2\frac{d\rho_3}{dt} - \frac{d\sigma_3}{dt}\rho_2 - \sigma_3\frac{d\rho_2}{dt}, \frac{d\sigma_3}{dt}\rho_1 + \sigma_3\frac{d\rho_1}{dt} - \frac{d\sigma_1}{dt}\rho_3 - \sigma_1\frac{d\rho_3}{dt},\right. \\
&\qquad \left.\frac{d\sigma_1}{dt}\rho_2 + \sigma_1\frac{d\rho_2}{dt} - \frac{d\sigma_2}{dt}\rho_1 - \sigma_2\frac{d\rho_1}{dt}\right) \\
&= \left(\frac{d\sigma_2}{dt}\rho_3 - \frac{d\sigma_3}{dt}\rho_2, \frac{d\sigma_3}{dt}\rho_1 - \frac{d\sigma_1}{dt}\rho_3, \frac{d\sigma_1}{dt}\rho_2 - \frac{d\sigma_2}{dt}\rho_1\right) \\
&\qquad + \left(\sigma_2\frac{d\rho_3}{dt} - \sigma_3\frac{d\rho_2}{dt}, \sigma_3\frac{d\rho_1}{dt} - \sigma_1\frac{d\rho_3}{dt}, \sigma_1\frac{d\rho_2}{dt} - \sigma_2\frac{d\rho_1}{dt}\right) \\
&= \frac{d\sigma}{dt} \times \rho + \sigma \times \frac{d\rho}{dt}.
\end{aligned}$$

6. Si $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ ¿qué fuerza actúa sobre una partícula de masa m que se mueve a lo largo de $\mathbf{r}$ en el instante $t = 0$?
   Solución: Aquí se debe aplicar la segunda ley de Newton. Note que $r(t) = (6t, 3t^2, t^3)$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{a}(t) = m\mathbf{r}"(t) = m(0, 6, 6t) = 6m(0, 1, t)$$

   De esta forma, en $t = 0$, la fuerza es equivalente a seis veces la masa en la dirección $\mathbf{j}$.

7. Demuestre que si la aceleración de un objeto es siempre perpendicular a la velocidad entonces la rapidez del objeto es constante.
   Solución: Note que la hipótesis dice $a(t) \cdot v(t) = 0$ o lo que es equivalente a escribir $v'(t) \cdot v(t) = 0$. Ahora la rapidez es $\|v(t)\| = \sqrt{v(t) \cdot v(t)}$ por lo que se calcula

$$\frac{d}{dt}(v(t) \cdot v(t)) = v'(t) \cdot v(t) + v(t) \cdot v'(t) = 2v'(t) \cdot v(t) = 0$$

   Así el cuadrado de la rapidez es constante y implica que la rapidez también lo es.

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 1 y 2 escriba una trayectoria que represente la curva dada.

1. La circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio 3.

2. El triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Determine la velocidad, la rapidez y la aceleración en el punto t dado, de un partícula que sigue cada una de las trayectorias dadas en los ejercicios 3 a 5.

3. $\sigma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t^2)$, $\quad t = \pi$.

4. $\sigma(t) = (t + 1, t - 2, t^2)$, $\quad t = 2$.

5. $\sigma(t) = (e^t, e^{-t})$, $\quad t = 1$.

6. Una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (t, t^2, t^3)$ hasta que sale por una tangente en $t = 2$, ¿en qué punto se encuentra cuando $t = 5$?

7. Determine una trayectoria $\sigma(t)$ tal que $\sigma(0) = (1, 2, 3)$ y $\sigma'(t) = (t, -t, t^3)$.

8. La aceleración de una partícula que se mueve en el plano es $a(t) = (24t^2, 4)$. Si en el instante $t = 0$ la partícula se encuentra en el punto $\sigma(0) = (1, 2)$ y en ese mismo instante su velocidad es $v(0) = (0, 0)$, determine la trayectoria de la partícula.

4.2 Longitud de arco

Si visualiza una curva como un pedazo de alambre, la medida del alambre al "estirarlo" es la *longitud de arco de la curva*. El texto proporciona una fórmula para determinar dicha longitud. Esta fórmula es lo fundamental de la sección.

Aunque la fórmula lleva fácilmente a establecer la integral que nos permite determinar la longitud de arco, usualmente esta integral es difícil de calcular utilizando las técnicas estándar. Incluso, algunas veces se hace necesario utilizar técnicas de aproximación. En los ejercicios que aparecen en el texto, por lo general sí se puede calcular la integral.

Observaciones

- La justificación de la fórmula de Longitud de arco, página 271 (261), presenta un análisis interesante que bosqueja el proceso de definición de la fórmula para determinar este valor; se recomienda que lea esta sección aunque no forme parte de los objetivos a evaluar en este curso. Lo mismo sucede con el diferencial de la longitud de arco, página 269 (259).
- De la lista de ejercicios de esta sección, los ejercicios recomendados son del 1 al 10, 12 y 19.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, de las página 273 y 274 (262-263)

1. Calcular la longitud de arco de $s(t) = ti + t(\operatorname{sen} t)j + t(\cos t)k$ en el intervalo $[0, \pi]$.
   Solución: Según la fórmula dada, la longitud de arco es la integral de la rapidez en el intervalo indicado.

   En este caso se tiene $s'(t) = 1i + (\operatorname{sen} t + t\cos t)j + (\cos t - t \operatorname{sen} t)k$, entonces:

   $$\|s'(t)\| = \sqrt{1^2 + (\operatorname{sen} t + t\cos t)^2 + (\cos t - t\operatorname{sen} t)^2} = \sqrt{2+t^2}.$$

   La longitud de arco viene dada por la integral $L = \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{2+t^2}\, dt$.

   Primero se calculará la integral indefinida. Para calcularla primero se procede por sustitución trigonométrica, y para $t = \sqrt{2}\tan\theta$, entonces $dt = \sqrt{2}\sec^2\theta\, d\theta$. Se tiene entonces que

   $$\int \sqrt{2+t^2}\, dt = 2\int \sec^3\theta\, d\theta.$$

   Para esta integral se procede por partes, haciendo $u = \sec\theta$ y $dv = \sec^2\theta$, así $du = \sec\theta\tan\theta$, y $v = \tan\theta$; entonces

$$\begin{aligned}\int \sec^3\theta\, d\theta &= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta\tan^2\theta\, d\theta \\ &= \sec\theta\tan\theta - \int \sec\theta(\sec^2\theta - 1)\, d\theta \\ &= \sec\theta\tan\theta - \left(\int \sec^3\theta - \sec\theta\right) \\ &= \sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta| - \int \sec^3\theta\, d\theta.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$2\int \sec^3\theta\, d\theta = \sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\,.$$

Como $t = \sqrt{2}\,\tan\theta$, entonces $\tan\theta = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ y $\sec\theta = \sqrt{\dfrac{t^2+2}{2}}$. Por lo tanto

$$\int \sqrt{2+t^2}\, dt = 2\int \sec^3\theta\, d\theta = \sqrt{\frac{t^2+2}{2}}\frac{t}{\sqrt{2}} + \ln\left|\sqrt{\frac{t^2+2}{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}}\right|.$$

Finalmente, la longitud de arco es:

$$\begin{aligned}L &= \int_0^\pi \sqrt{2+t^2}\, dt = \left(\sqrt{\frac{t^2+2}{2}}\frac{t}{\sqrt{2}} + \ln\left|\sqrt{\frac{t^2+2}{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}}\right|\right)\Bigg|_0^\pi \\ &= \frac{1}{2}\pi\sqrt{2+\pi^2} + \ln\left(\pi + \sqrt{2+\pi^2}\right) - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

2. Hallar la longitud de arco de la trayectoria $\sigma(t) = (2t, t^2, \log t)$, entre los puntos $(2,1,0)$ y $(4,4,\log 2)$. (Aquí el libro utiliza $\log$ para logaritmo natural, se ha mantenido a pesar que en las respuestas se a usado $\ln$.)

   Solución: Observe que los puntos dados se obtienen en $t = 1$ (pues $\sigma(1) = (2,1,0)$) y en $t = 2$ (pues $\sigma(2) = (4,4,\ln 2)$). La derivada es $\sigma'(t) = \left(2, 2t, \dfrac{1}{t}\right)$ y su rapidez es

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{\frac{4t^4+4t^2+1}{t^2}} = \sqrt{\frac{(2t^2+1)^2}{t^2}} = \frac{2t^2+1}{t}$$

   Luego, la longitud de arco es

$$L = \int_1^2 \frac{2t^2+1}{t}\, dt = \int_1^2 \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = t^2 + \ln t\Big|_1^2 = 4 + \ln 2 - 1 - \ln 1 = 3 + \ln 2.$$

Ejercicios propuestos

1. Determine la longitud de arco de la trayectoria $\sigma(t) = (12t, 5\cos t, 3 - 5\operatorname{sen} t)$ desde $t = 0$ hasta $t = 2$.
2. Determine la longitud de arco de la trayectoria $\sigma(t) = (t, 2t, 3t)$ desde $t = 0$ hasta $t = 2$.
3. Determine la longitud de arco de la trayectoria $\sigma(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 5t)$ desde $t = 0$ hasta $t = \pi$.
4. Determine la longitud de arco de la trayectoria $\sigma(t) = (\cos^3 t, 0, \cos^2 t)$ desde el punto $(1, 0, 1)$ hasta el punto $(-1, 0, 1)$.

4.3 Campos vectoriales

Básicamente esta sección se dedica a dos conceptos:

- *Campo vectorial*: es una función F de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.
- *Línea de flujo*: si F es un campo vectorial, una línea de flujo para F es una trayectoria $\sigma(t)$ tal que $\sigma'(t) = F(\sigma(t))$ (la velocidad de la trayectoria es producida por F).

Las explicaciones geométricas que proporcionan los autores resultan bastante clarificadoras.

Un aspecto importante a considerar es que un campo vectorial F en $\mathbb{R}^n$ está formado por n campos escalares; es decir n funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Por ejemplo, si $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $F(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2)$, entonces está formado por 3 campos escalares (de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$):

$$F_1(x, y, z) = x + y^2, \quad F_2(x, y, z) = y + z^2, \quad F_3(x, y, z) = z + x^2.$$

El campo vectorial F cuyas componentes son F_1, F_2, F_3 se escribe como $F = (F_1, F_2, F_3)$ o, utilizando la base canónica de $\mathbb{R}^3$, como $F = F_1\, i + F_2\, j + F_3\, k$.

Algunos conceptos sobre campos vectoriales fueron estudiados en el curso de Análisis Real.

Los ejercicios recomendados para esta sección son todos.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, de las página 285 y 286 (272-273)

1. Sea $c(t)$ una línea de flujo de un campo vectorial gradiente $F = -\nabla V$. Demostrar que $V(c(t))$ es decreciente como función de t.

   Solución: Si $c(t)$ es una línea de flujo de $F = -\nabla V$, entonces, por definición,

   $$c'(t) = F(c(t)) = -\nabla V(c(t)) \tag{13}$$

   Sea $f(t) = V(c(t))$, se calcula su primera derivada:

   $$\begin{aligned} f'(t) &= \nabla V(c(t)) \cdot c'(t) && \text{por la regla de la cadena} \\ &= -F(c(t)) \cdot c'(t) && \text{por la definición de } F \\ &= -c'(t) \cdot c'(t) && \text{por (13)} \\ &= -\|c'(t)\|^2 && \text{por definición de norma} \end{aligned}$$

   Dado que $-\|c'(t)\|^2 \leq 0$, se concluye $f'(t) \leq 0$ y, por lo tanto, $f(t) = V(c(t))$ es decreciente.

2. Mostrar que $\sigma(t) = (e^{2t}, \log|t|, \frac{1}{t})$ es una línea de flujo de $F(x, y, z) = (2x, z, -z^2)$.

   Solución: Primero se calcula la derivada de σ:

   $$\sigma'(t) = \left(2e^{2t}, \frac{1}{t}, -\frac{1}{t^2}\right)$$

   Ahora:

   $$F(\sigma(t)) = F\left(e^{2t}, \ln|t|, \frac{1}{t}\right) = \left(2e^{2t}, \frac{1}{t}, -\frac{1}{t^2}\right)$$

   Dado que $\sigma'(t) = F(\sigma(t))$, se concluye que σ es una línea de flujo para F.

Ejercicios propuestos

1. Pruebe que la trayectoria $c(t) = \left(\frac{1}{2-t}, \frac{1}{3-t}, \frac{1}{4-t}\right)$ es una línea de flujo del campo vectorial $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

2. Determine los valores de a, b y c, tales que la trayectoria $\sigma(t) = (e^{at}, bt^{-1}, e^{ct})$ sea una línea de flujo de $F(x, y, z) = (2x, 3y^2, 4z)$.

3. Determine las líneas de flujo de $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

4.4 Rotacional y divergencia

En esta sección se proporciona la definición de dos operadores para campos vectoriales y se prueban dos propiedades importantes de ellos. Si $F = (F_1, F_2, F_3)$, estos operadores se definen así:

- *Rotacional*:

$$\text{rot}\, F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) k$$

- *Divergencia*:

$$\text{div}\, F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Observe que el rotacional es un campo vectorial, mientras que la divergencia es un campo escalar.

Además, se dice que un campo vectorial es *irrotacional* si su rotacional es $(0, 0, 0)$ y es *incompresible* si su divergencia es 0.

Los ejercicios recomendados de esta sección van del 1 al 16 y del 21 al 33.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, páginas de la 302 a la 305 (286 a la 288)

1. Calcular el rotacional y la divergencia de $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3i + 4j + 5k)$.

   Solución: Observe que $F(x, y, z) = (3x^2 + 3y^2 + 3z^2, 4x^2 + 4y^2 + 4z^2, 5x^2 + 5y^2 + 5z^2)$, esto da, de modo más evidente, los componentes de F. Se tiene que:

$$\begin{aligned}\text{rot}\, F &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(5x^2 + 5y^2 + 5z^2) - \frac{\partial}{\partial z}(4x^2 + 4y^2 + 4z^2)\right) i \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial z}(3x^2 + 3y^2 + 3z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(5x^2 + 5y^2 + 5z^2)\right) j \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(4x^2 + 4y^2 + 4z^2) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 3y^2 + 3z^2)\right) k \\ &= (10y - 8z)i + (6z - 10x)j + (8x - 6y)k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} F &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2+3y^2+3z^2)+\frac{\partial}{\partial y}(4x^2+4y^2+4z^2)+\frac{\partial}{\partial z}(5x^2+5y^2+5z^2)\\ &= 6x+8y+10z.\end{aligned}$$

2. Sea $F(x,y,z)=(3x^2y, x^3+y^3, 0)$.

   (a) Comprobar que $\operatorname{rot} F = 0$

   (b) Hallar una función f tal que $\nabla f = F$

   Solución:

   a) $$\begin{aligned}\operatorname{rot} F &= \left(\frac{\partial}{\partial y}0-\frac{\partial}{\partial z}(x^3+y^3)\right)i+\left(\frac{\partial}{\partial z}(3x^2y)-\frac{\partial}{\partial x}0\right)j+\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^3)-\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y)\right)k\\ &= 0i+0j+(3x^2-3x^2)k=(0,0,0)\end{aligned}$$

   b) Para que $F=\nabla f$, es necesario que $(3x^2y, x^3+y^3, 0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$ y, por lo tanto:

   $$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^3+y^3,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

   En el primer caso, al integrar respecto a x se obtiene $f(x,y,z)=x^3y+C(y,z)$, donde $C(y,z)$ es un término que depende de y y de z.

   Al integrar la segunda igualdad con respecto a y, se obtiene $f(x,y,z)=x^3y+\frac{1}{4}y^4+D(x,z)$, donde $D(x,z)$ es un término que depende de x y z. Finalmente, se integra en la tercera igualdad con respecto a z y se obtiene $f(x,y,z)=E(x,y)$ (es decir, f no depende de z). Según esto, se puede tomar $f(x,y,z)=x^3y+\frac{1}{4}y^4$.

3. Verificar que $F=y(\cos x)i+x(\operatorname{sen} y)j$ no es un campo gradiente.

   Solución: Para que fuera un gradiente debe existir una función $f(x,y)$ tal que $\nabla f=F$; es decir, tal que

   $$\frac{\partial f}{\partial x}=y(\cos x),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x(\operatorname{sen} y).$$

   Pero integrando en el primer caso con respecto a x y en el segundo con respecto a y se obtendría:

   $$f(x,y)=y(\operatorname{sen} x)+A(y),\quad f(x,y)=-x(\cos y)+B(x).$$

   Como $A(y)$ solo depende de y, pero el término $-x(\cos y)$ depende de x y de y, no hay manera de obtener f en la forma $f(x,y)=y(\operatorname{sen} x)+A(y)$; es decir, F no es un gradiente.

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 1 a 3, calcule el rotacional y la divergencia del campo vectorial dado.

1. $F = e^{-xy}\, i + e^{xz}\, j + e^{yz}\, k$
2. $F = (e^x \operatorname{sen} y)\, i + e^x \cos y\, j + k$
3. $F = xy^2\, i + yz^2\, j + zx^2\, k$
4. Para $F = xy\, i + yz\, j + z^2\, k$ y $G = x\, i + y\, j - z\, k$, calcule $\operatorname{div}(F \times G)$.
5. Sea A un vector constante y $R = x\, i + y\, j + z\, k$. Pruebe que $\operatorname{rot}(A \times R) = 2A$.
6. Sea A un vector constante y $R = x\, i + y\, j + z\, k$. Pruebe que $\operatorname{div}(A \times R) = 0$.

Capítulo 5. Integrales dobles y triples

5.1 y 5.2 Integral doble sobre un rectángulo

Recuerde que, en el caso de funciones de una sola variable, la integral definida, sobre un intervalo cerrado de la recta real, de una función f es "el área bajo la curva" (si la función es positiva en ese intervalo). La integral doble considera funciones de dos variables y ya no se integra sobre un intervalo sino sobre una región en el plano; la integral doble (de una función positiva) sobre una región es el volumen del sólido bajo la superficie que representa la función. En la sección 5.1 se exponen tales ideas.

Posteriormente, se enuncia el *principio de Cavalieri* que establece lo siguiente:

> Si el área de la sección transversal de un cuerpo sólido, medida a una distancia x de un plano de referencia, es $A(x)$, entonces el volumen del sólido está dado por la expresión $V = \int_a^b A(x)\, dx$, donde a y b son, respectivamente, la distancia mínima y máxima a partir del plano de referencia.

Este principio lleva a un método para calcular integrales dobles cuando la región de integración es rectangular. En este caso, la integral doble sobre tal tipo de región se reduce al cálculo de integrales iteradas; esto es, el cálculo de dos integrales definidas en una variable.

Una integral iterada es una integral del tipo

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy \right] dx, \tag{14}$$

en la que, para su cálculo, se integra primero la integral de "adentro", considerando la función solo como función de y (esto es, la x se comporta como constante al momento de efectuar la integral). Una vez que se ha calculado la integral de adentro, queda una sola integral en función de x. Hemos dicho que se integra primero con respecto a y y luego con respecto x porque así está escrito en (14), pero puede ser al revés, si así lo indica una expresión como la siguiente:

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]\,dy,$$

Observe que en ésta, "adentro" aparece dx y afuera dy, al contrario de la anterior. En síntesis, cuál integral se realiza primero depende de qué diferencial aparezca "adentro".

Así, la integral doble de $f(x,y)$ sobre la región rectangular $R=[a,b]\times[c,d]$ es:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]\,dx.$$

En la sección 5.2 se formaliza lo expresado en la sección introductoria. Es importante comprender los teoremas aquí enunciados, pero no nos preocuparemos por sus demostraciones.

El *teorema de Fubini* reafirma lo indicado en la sección anterior con respecto a la forma como se calcula una integral doble cuando la región de integración es rectangular; esto es, establece la igualdad entre la integral doble y la integral iterada correspondiente.

Se recomienda hacer los ejercicios de la sección 5.1 del 1 al 7. Y de la sección 5.2 del 1 al 10.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, páginas de la 317 a la 318 (300 a la 302) y de la 330 a la 331 (313-315)

1. Calcular la integral $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^1 (x^4y+y^2)\,dydx$.

   Solución: Note que, el diferencial que aparece adentro es dy por lo que primero se integra con respecto a y, considerando x como una constante; luego se procede con la integral que queda (con respecto a x):

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\int_0^1 (x^4y+y^2)\,dydx &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}x^4y^2+\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 dx\\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{1}{10}x^5+\frac{1}{3}x\right]_{-1}^1 = \frac{13}{15}.\end{aligned}$$

   Como puede ver, se supone que usted maneja todos los elementos necesarios para el cálculo de las integrales en una variable. Si no es así, repase sus materiales del curso Cálculo Integral.

2. Usando el principio de Cavalieri, calcular el volumen de la estructura mostrada en la figura 5.1.11, página 317; cada sección transversal es un rectángulo de longitud 5 y ancho 3.

   Solución: Para calcular el volumen de la estructura, observe que cada sección transversal es un rectángulo de 5 de largo por 3 de ancho, de modo que $A(x) = 15$ (el área del rectángulo que corresponde a la sección transversal). Si se toma como plano de referencia la base de la estructura entonces la distancia mínima es 0 (la base está sobre el plano) y la máxima es 7 (la altura de la estructura), de modo que el volumen de la estructura es (según el principio de Cavalieri): $V = \displaystyle\int_0^7 (15)dx = 15x \mid_0^7 = 105 - 0 = 105.$

3. Evaluar la integral doble $\displaystyle\iint_R \left(|y| \cos \frac{1}{4}\pi x\right) \, dydx$, donde $R = [0,2] \times [-1,0]$.

   Solución:

   En la región propuesta se tiene que $y \leq 0$, por lo tanto $|y| = -y$; entonces

$$\begin{aligned}
\iint_R \left(|y| \cos \frac{1}{4}\pi x\right) \, dydx &= \int_0^2 \int_{-1}^0 \left(-y \cos \frac{1}{4}\pi x\right) \, dydx \\
&= \int_0^2 \left[-\frac{1}{2}y^2 \cos \frac{\pi}{4}x\right]_{-1}^0 \, dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4}x\right) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}x \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0\right) = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

4. Evaluar la integral $\iint_R \operatorname{sen}(x+y) \, dx \, dy$, donde $R = [0,1] \times [0,1]$.

   Solución: De acuerdo con el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
&\iint_R \operatorname{sen}(x+y) \, dxdy \\
&\qquad = \int_0^1 \int_0^1 \operatorname{sen}(x+y) \, dxdy \\
&\qquad = \int_0^1 \left[-\cos(x+y)\right]_0^1 \, dy \\
&\qquad = \int_0^1 \left(-\cos(1+y) + \cos(y)\right) \, dy \\
&\qquad = \left[-\operatorname{sen}(1+y) + \operatorname{sen}(y)\right]_0^1 \\
&\qquad = -\operatorname{sen} 2 + \operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} 0 \\
&\qquad = -\operatorname{sen} 2 + 2 \operatorname{sen} 1.
\end{aligned}$$

5. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos $x = 1$, $y = 1$, y la superficie $z = x^2 + y^4$.

   Solución

   La proyección del sólido sobre el plano xy es el rectángulo $R = [0,1] \times [0,1]$; entonces, el volumen bajo la superficie es

$$\begin{aligned}
\int_R (x^2 + y^4)\, dxdy &= \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^4)\, dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + xy^4\right]_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^4\right) dy \\
&= \left[\frac{1}{3}y + \frac{1}{5}y^5\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 1 a 4 calcule la integral doble de $f(x,y)$ dada sobre el rectángulo R.

1. $f(x,y) = (2x+y)^3$, $R = [-1,5] \times [3,7]$
2. $f(x,y) = x^2ye^{xy}$, $\quad R = [0,1] \times [0,1]$
3. $f(x,y) = x\,\cos(2x - y)$, $\quad R = [1,2] \times [3,4]$
4. $f(x,y) = \dfrac{1}{(2x+y-3)^3}$, $\quad R = [2,3] \times [2,3]$

5.3 Integral doble sobre regiones más generales

En las secciones anteriores se definió el concepto de integral doble de una función de dos variables sobre regiones rectangulares; en esta sección este concepto se amplía para definir una integral doble sobre otro tipo de regiones en el plano. Si f es la función dada y D es la región, lo anterior se logra considerando un rectángulo R que contenga a la región D y definiendo una función nueva g que sea igual a la función dada dentro de la región e igual a 0 en toda la parte del rectángulo que queda fuera de la región. La integral doble de la función dada f, sobre la región D, se define como la integral doble de la nueva función g sobre el rectángulo R.

Esta definición sirve para formalizar el concepto pero, en la práctica, el cálculo de integrales dobles en general se reduce a calcular integrales iteradas en el sentido establecido por los teoremas 4 y 4′.

Al establecer la o las integrales iteradas que corresponden a una integral doble se debe tener mucho cuidado con los límites de integración. Algunas consideraciones al respecto son las siguientes:

- Recuerde que los límites de integración de la integral de "afuera" corresponden a la variable cuyo diferencial aparece segundo (a la derecha) en el integrando; desde luego, los de la de "adentro" corresponden a la variable cuyo diferencial aparece primero en el integrando.
- Los límites de integración de la integral de afuera tienen que ser constantes.
- Los límites de integración de la integral de adentro pueden ser constantes o variables, pero si son variables solo pueden depender de la variable cuyo diferencial aparece segundo en el integrando. Por ejemplo si el integrando es $f(x, y)\, dxdy$, los límites de integración de la integral de adentro solo pueden depender de la variable y pues el segundo diferencial es dy.
- Puede aprenderse cuáles son los tipos de regiones elementales que se presentan, pero lo importante es comprender de qué manera se seleccionan los límites de integración de las integrales iteradas. Para seleccionar tales límites es muy conveniente realizar un dibujo adecuado de la región de integración.
- Cuando se tiene una integral iterada como $\displaystyle\int_a^b \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\, dx\, dy$, se considera que la región de integración es $D = \{(x, y)\,|\, a \leq y \leq b,\ \phi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$ o, viéndolo geométricamente, que la región está constituida por los puntos (x, y) tales que la y varía desde $y = a$ hasta $y = b$ y la x varía desde la curva $x = \phi(y)$ hasta la curva $x = \psi(y)$.

En los ejercicios que se resuelven a continuación se detalla estas indicaciones.

Finalmente, aunque la integral doble (de una función positiva) se interpreta geométricamente como el volumen bajo una superficie sobre la región de integración D, es muy útil para calcular áreas de regiones planas. En efecto, el área de la región D viene dada por:

$$A(D) = \iint_D dxdy,$$

donde $\displaystyle\iint_D dxdy$ es lo mismo que $\displaystyle\iint_D 1\,dxdy$ (la integral de la función constante $f(x,y)=1$).

Los ejercicios recomendados de esta sección son del 1 al 16.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, páginas de la 337 a la 338 (321 a la 322)

1. Trazar la región de integración D y evaluar la integral iterada: $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx.$

   Solución: Para trazar la región, lo más conveniente es decidir primero cuáles son las curvas determinadas por los límites de integración variables. En este y varía entre las gráficas de las curvas $y=0$, $y=2\sqrt{1-x^2}$. La primera de ellas es la recta $y=0$; para visualizar mejor la segunda se elevan ambos lados al cuadrado y se obtiene $y^2=4(1-x^2)$ y esto es equivalente a $x^2+\dfrac{1}{4}y^2=1$. La segunda curva es un arco de una elipse. Este arco está determinado por los valores entre los que varía la x; estos son $x=-1$ y $x=0$, tal como se observa en la figura adjunta.

   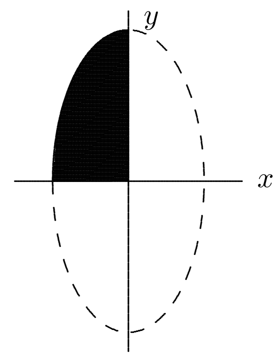

   Figura 3: Región de integración.

   En la figura, se han dibujado la elipse completa; el arco correspondiente a $y=2\sqrt{1-x^2}$ con $x\in[-1,0]$ es el que aparece con trazo sólido.

   La otra parte del ejercicio es calcular la integral:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx &= \int_{-1}^{0}\left[xy\right]_0^{2\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= \int_{-1}^{0} 2x\sqrt{(1-x^2)}\,dx = -\int_0^1 \sqrt{u}\,du = -\frac{2}{3}\left(\sqrt{u}\right)^3\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

   Nota: Para calcular la integral $\displaystyle\int_{-1}^{0} 2x\sqrt{(1-x^2)}\,dx$ se realizó el cambio de variable $u=1-x^2$. Por lo tanto, $-du=2x\,dx$. Si $x=-1\Rightarrow u=0$; si $x=0\Rightarrow u=1$.

2. Calcular $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, donde D está acotada por la parte positiva de los ejes x, y (esto quiere decir que está en el primer cuadrante) y la recta $3x+4y=10$.

   Solución: Primero se dibuja la región de integración. Para ello se determina en qué puntos corta la recta dada a ambos ejes.

   - Para saber dónde corta al eje x se hace $y=0$, entonces $3x+4\cdot 0=10$ y, por lo tanto $x=\dfrac{10}{3}$.

- Para saber dónde corta al eje y se hace $x = 0$, entonces $3 \cdot 0 + 4y = 10$ y, por lo tanto $y = \frac{5}{2}$.

Lo anterior produce la región sombreada en la figura. Note que x varía entre 0 y $\frac{10}{3}$; si se toma un valor x_0 cualquiera en ese intervalo y se consideran los puntos (x_0, y) en la región, verá que la y viaja desde 0 hasta la recta dada. Despejando y en la ecuación de la recta se obtiene $y = \frac{5}{2} - \frac{3}{4}x$; esto dice que

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)dxdy &= \int_0^{\frac{10}{3}} \int_0^{\frac{5}{2}-\frac{3}{4}x} (x^2+y^2)\,dy\,dx \\
&= \int_0^{\frac{10}{3}} \left[x^2y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^{\frac{5}{2}-\frac{3}{4}x} dx \\
&= \int_0^{\frac{10}{3}} \left(x^2\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{4}x\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{4}x\right)^3\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{10}{3}} \left(\frac{125}{32}x^2 - \frac{57}{64}x^3 + \frac{125}{24} - \frac{75}{16}x\right) dx \\
&= \frac{125}{96}x^3 - \frac{57}{256}x^4 + \frac{125}{24}x - \frac{75}{32}x^2\Big|_0^{\frac{10}{3}} = \frac{15625}{1296}.
\end{aligned}$$

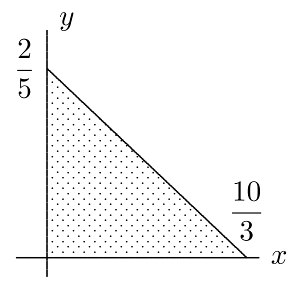

Figura 4: Domino de integración.

3. Hallar el volumen de la región dentro de la superficie $z = x^2 + y^2$, entre $z = 0$ y $z = 10$.

   Solución: Si se sustituye $z = 10$ en la ecuación original se obtiene $x^2 + y^2 = 10$, de modo que su sección transversal en el plano $z = 10$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 10$, $z = 10$. De acuerdo con esto, la proyección de la superficie indicada, sobre el plano xy es el círculo $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 10\}$. Entonces, el volumen bajo $S : z = x^2 + y^2$ está dado por $V_S = \iint_D (x^2 + y^2)\,dy\,dx$. Pero nos están pidiendo el volumen de lo que está debajo de la gráfica. Si esta se considera determinada por el plano $z = 10$, el volumen del sólido bajo esta superficie C, sobre D, es $V_C = \iint_D 10\,dy\,dx$. Observe que el sólido que el ejercicio está considerando está contenido entre las superficies C y S.

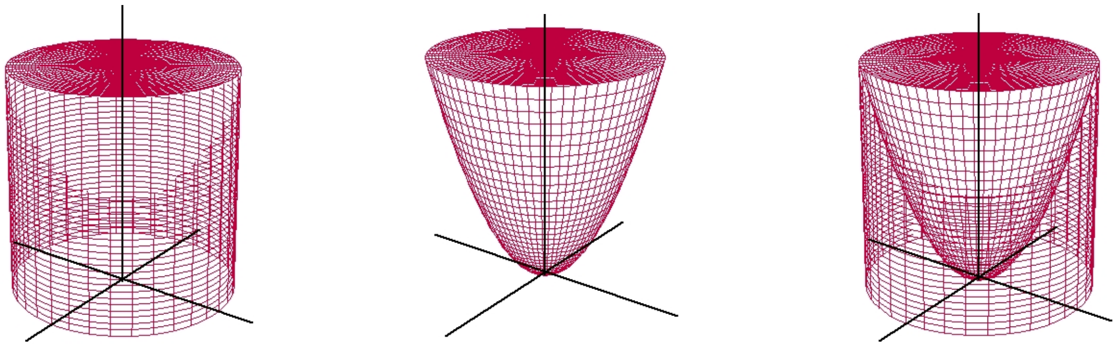

Figura 5: Cálculo de volumen interno.

Por lo que su volumen será

$$V = V_C - V_S = \iint_D 10\,dy\,dx - \iint_D (x^2+y^2)\,dy\,dx = \iint_D (10 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$$
$$= \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \int_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} (10 - x^2 - y^2)\,dy\,dx = \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \left[10y - x^2y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-\sqrt{10-x^2}}^{\sqrt{10-x^2}} dx$$
$$= \int_{-\sqrt{10}}^{\sqrt{10}} \frac{4}{3}\left(10 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} dx = 50\pi$$

Ejercicios propuestos

1. Dibuje la región de integración y calcule $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{4}y^2}^{\sqrt{12-y^2}} dx\,dy$.

2. Calcule $\displaystyle\iint_D (x-2y)\,dy\,dx$, donde D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,1)$, $(4,4)$.

3. Calcule $\displaystyle\iint_D 4x\,dy\,dx$, donde D es la región acotada por $y = 4 - x^2$, $y = 3x$, $x = 0$.

4. Determine $\displaystyle\iint_D 12x^2e^{y^2}\,dy\,dx$, donde D es la región del primer cuadrante delimitada por las curvas $y = x^3$, $y = x$.

5. Calcule el volumen bajo la superficie $z = x+y+2$ sobre la región acotada por la curva $y = x^2$ y por la recta $y = 2$.

5.4 Cambio en el orden de integración

En esta sección se expone una técnica que en ocasiones permite simplificar el cálculo de una integral doble y se enuncia el teorema del valor medio para integrales.

Cambio de orden de integración: Si la primera variable con respecto a la que vamos a integrar es x, es posible cambiar los límites de integración de la integral iterada correspondiente e integrar primero con respecto a y (también vale a la inversa: pasar de integrar primero con respecto a y a integrar primero con respecto a x). Hay que tener el cuidado de que los nuevos límites de integración describan exactamente la misma región que los dados originalmente. Observe que puede suceder, al cambiar el orden de integración, que haya que partir la región dada en subregiones para que se satisfagan las condiciones indicadas en la sección anterior.

Por ejemplo, en la región sombreada en la figura, si se integra una función f primero con respecto a y se tendría $\int_0^1 \int_x^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$, mientras que si se hace primero con respecto a x, habrá que partir la región de integración para que los límites de las integrales de afuera queden constantes; en este caso, la integral doble se convertiría en

$$\int_0^1 \int_0^y f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$

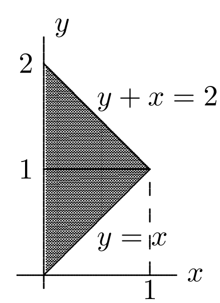

Figura 6: Cambio en el orden.

Existen al menos dos razones por las que, algunas veces, se debe cambiar el orden de integración:

1. Para simplificar los límites de integración o el cálculo mismo de la integral.
2. Porque en la forma que está propuesta la integral no se puede realizar el cálculo y éste sí se logra al hacer el cambio en el orden. Vea la solución del primer ejercicio que se expone más adelante.

Teorema del valor medio para integrales: Aunque el interés primordial en esta sección es el cambio de orden de integración, es conveniente que usted comprenda este teorema, aunque NO se utilizará muy a menudo.

El teorema establece, bajo las hipótesis adecuadas, que existe un punto en la región D tal que la integral doble de f sobre la región D es igual al área de D por la imagen de ese punto.

Los ejercicios recomendados en esta sección van del 1 al 15.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, páginas de la 343 a la 344 (326 a la 327)

1. Calcular la integral iterada $\displaystyle\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 e^{x^2}\,dx\,dy$.

   Solución: En este caso los límites de integración son "simples", sin embargo, primero es necesario calcular la integral $\int e^{x^2}\,dx$. Resulta que esta integral no es determinable en términos de funciones elementales; esto es, no existe ninguna técnica que permita conocer, de forma explícita, una primitiva. No es posible realizar los cálculos tal como está expresada la integral. Sin embargo, si la integral de adentro fuera $\int e^{x^2}\,dy$, esta sí se podría realizar, puesto que, como e^{x^2} no depende de y, entonces $\int e^{x^2}\,dy = e^{x^2}y$. Lo anterior elimina el problema en la primera integración, pero habría que ver si el problema se resuelve por completo. Esto es precisamente lo que se hará a continuación:

   En la figura se representa la región de integración. Al cambiar el orden, los límites constantes deben corresponder a x; estos son: $x = 0$ y $x = 2$. Mientras tanto, para los puntos (x, y) en la región, con $x \in [0, 2]$, el valor de y varía entre $y = 0$ y $y = 2x$.

   Así, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^2 e^{x^2}\,dx\,dy &= \int_0^2 \int_0^{2x} e^{x^2}\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 \left[e^{x^2}y\right]_0^{2x} dx = \int_0^2 2xe^{x^2}\,dx \\
&= e^{x^2}\Big|_0^2 = e^4 - 1.
\end{aligned}
$$

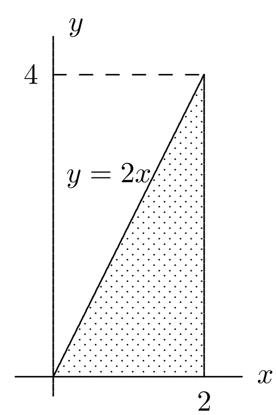

Figura 7: Región de integración.

   Observe que al hacer el cambio, tanto la primera como la segunda integral se hacen calculables.

2. Mostrar que $\displaystyle\frac{1}{2}(1 - \cos 1) \leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + (xy)^4}\,dx\,dy \leq 1$.

   Solución: La idea es encontrar una función g y una h tal que, en la región considerada ($D = [0, 1] \times [0, 1]$), se tenga que $g(x, y) \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + (xy)^4} \leq h(x, y)$ y además,

$$
\iint_{[0,1]\times[0,1]} g(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}(1 - \cos 1), \quad \iint_{[0,1]\times[0,1]} h(x, y)\,dx\,dy = 1.
$$

Si observa detenidamente, se dará cuenta que $\frac{1}{2}(1-\cos 1) = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\, dx\, dy$ y que $1 = \iint_{[0,1]\times[0,1]} 1\, dx\, dy$. Así, si es posible verificar que $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4} \leq 1$, se habrá probado lo que se solicita.

En efecto, $0 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 1$, por lo tanto $(xy)^4 \leq 1$ y, entonces $1+(xy)^4 \leq 2$. De aquí, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+(xy)^4}$ y, multiplicando por $\operatorname{sen} x$ (que es no negativo para $x \in [0,1]$), se tiene

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4}.$$

Por otra parte, $\operatorname{sen} x \leq 1$, entonces, sumando $(xy)^4$ (que es no negativo) al lado derecho: $\operatorname{sen} x \leq 1+(xy)^4$ y, dividiendo por $1+(xy)^4$, se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4} \leq 1.$$

Se concluye que

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \leq \frac{\operatorname{sen} x}{1+(xy)^4} \leq 1$$

como se quería verificar.

Ejercicios propuestos

1. Dibuje la región de integración y calcule la integral de dos maneras; en el orden en que se da y cambiando el orden de integración: $\int_{-2}^{1}\int_{y^2+4y}^{3y+2} dx\, dy$.
2. Dibuje la región de integración y cambie el orden en $\int_{0}^{3}\int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\, dx\, dy$.
3. Dibuje la región de integración y cambie el orden en $\int_{-3}^{2}\int_{x^2}^{6-x} f(x,y)\, dy\, dx$.
4. Dibuje la región, cambie el orden de integración y evalúe:
$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{y}(x^2+y^2)\, dx\, dy + \int_{1}^{2}\int_{0}^{2-y}(x^2+y^2)\, dx\, dy.$$
5. Dibuje la región y cambie el orden de integración:
$$\int_{1}^{2}\int_{x}^{x^3} f(x,y)\, dy\, dx + \int_{2}^{8}\int_{x}^{8} f(x,y)\, dy\, dx.$$

5.5 La integral triple

En esta sección se define la integral triple. Consiste en integrar una función de tres variables $f(x, y, z)$ sobre una región que corresponde a un sólido en $\mathbb{R}^3$. De acuerdo con el teorema de Fubini, una integral triple se calcula mediante integrales iteradas, comenzando de adentro hacia afuera. En este caso, se deberán realizar tres integrales unidimensionales: una con respecto a x, otra con respecto a y y otra con respecto a z; el orden depende de cómo se determinen los límites de integración. Algunas indicaciones análogas al caso de integrales dobles:

- Los límites de integración de la integral de "afuera" corresponden a la variable cuyo diferencial aparece tercera (a la derecha) en el integrando; los de la integral del "centro" corresponden a la variable cuyo diferencial aparece segundo (en el medio) en el integrando.
- Los límites de integración de la integral de afuera tienen que ser constantes.
- Los límites de integración de la integral del medio pueden ser constantes o variables, pero si son variables solo pueden depender de la variable cuyo diferencial aparece último en el integrando. Por ejemplo, si el integrando es $f(x, y, z)\, dxdydz$, los límites de integración de la integral del medio solo pueden depender de la variable z, pues el tercer diferencial es dz.
- Los límites de integración de la integral de adentro pueden ser constantes o variables. Si son variables pueden depender de una o de las dos variables cuyo diferencial aparece segundo o tercero en el integrando. Por ejemplo, si el integrando es $f(x, y, z)\, dxdydz$, los límites de integración de la integral de adentro pueden depender de la variable y, de la z o de las dos.
- Para seleccionar los límites de integración es conveniente esbozar la región de integración.
- Cuando se escribe una integral iterada como $\int_a^b \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \int_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$, se considera que la región es $W = \{(x, y, z)\,|\, a \leq x \leq b,\ \phi(x) \leq y \leq \psi(x), \gamma(x, y) \leq x \leq \delta(x, y)\}$ o, viéndolo geométricamente, decimos que la región está constituida por los puntos (x, y, z) tales que la x varía desde $x = a$ hasta $x = b$, la y varía desde la curva $y = \phi(x)$ hasta la curva $y = \psi(x)$ y la z varía desde la superficie $z = \gamma(x, y)$ hasta la superficie $z = \delta(x, y)$.

Finalmente, recuerde que la integral triple sobre S:

$$\iiint_S dx\ dy\, dz$$

corresponde al volumen del sólido S. Así, si se quiere calcular el volumen del sólido determinado por la intersección de las superficies $z = x^2+y^2$ (paraboloide) y $z = \sqrt{1-x^2-y^2}+1$ (semi cáscara esférica) que está representada a la izquierda en la siguiente figura.

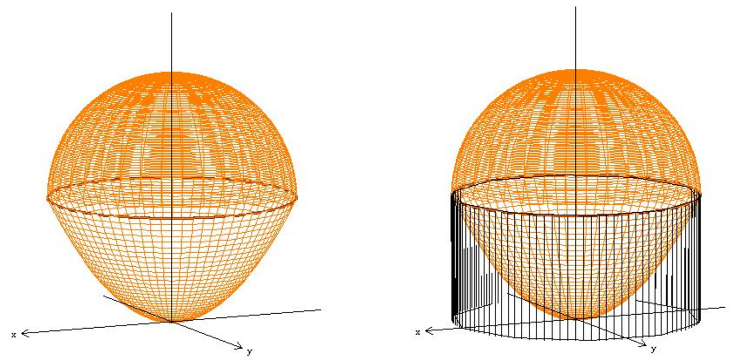

Figura 8: Volumen de un sólido.

Lo que se hace para determinar los límites de integración es proyectar la superficie sobre el plano xy, que como se puede apreciar en esta figura, se obtiene un círculo de radio 1. Con esto, se determina que los valores de x están en el intervalo $[-1,1]$, los de y varían entre las gráficas $y = \sqrt{1-x^2}$ y $y = -\sqrt{1-x^2}$ y los valores de z entre $z = x^2+y^2$ y $z = \sqrt{1-x^2-y^2}+1$.

Los ejercicios recomendados en esta sección comprenden toda la lista.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, páginas de la 354 a la 355 (346 a la 347)

1. Calcular $\iiint_W (1-z^2)dx\ dy\, dz$, donde W es la pirámide con vértice superior en $(0,0,1)$ y vértices de la base en $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(1,1,0)$.

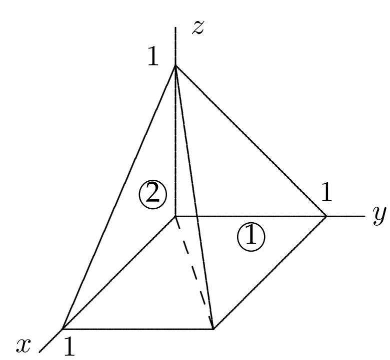

Figura 9: Región de integración triple.

Solución: En principio se puede ver en la figura adjunta que x varía entre $x = 0$ y $x = 1$ y que los correspondientes valores de y varían entre $y = 0$ y $y = 1$. Pero, ¿qué sucede con

z? Observe que si se toman, por ejemplo, los puntos de la forma $\left(0, \frac{1}{2}, z\right)$ en la región, entonces los valores de z varían desde $z = 0$ hasta aquellos que hacen que $\left(0, \frac{1}{2}, z\right)$ estén en el plano señalado con ① en la figura. Por otro lado, si considera los puntos de la forma $\left(\frac{1}{2}, 0, z\right)$, estos van desde $z = 0$ hasta el plano señalado con ②.

Esto indica que hay que dividir el sólido en al menos dos partes, y así determinar los límites de integración.

Dado que la proyección de la intersección entre ambos planos (① y ②) sobre el plano xy es el segmento de recta de extremos $(0,0,0)$ y $(1,1,0)$, entonces el sólido puede partirse con el plano que contiene ese segmento de recta y que cae perpendicularmente sobre el plano xy. Esto produce dos sólidos W_1 y W_2 y la integral sobre W es igual a la suma de las integrales sobre W_1 y W_2.

Se sabe que la recta que pasa por $(0,0,0)$ y $(1,1,0)$ tiene como ecuación $y = x$, $z = 0$. El plano ①, que contiene los puntos $(1,1,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ tiene por ecuación $z = 1 - y$. Y el plano ②, que contiene los puntos $(1,1,0)$, $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$ tiene por ecuación $z = 1 - x$.

El sólido W_1 está formado por los puntos (x,y,z) tales que x varía de $x = 0$ a $x = 1$; y varía de $y = x$ a $y = 1$; z varía de $z = 0$ a $z = 1 - y$. El sólido W_2 está formado por los puntos (x,y,z) tales que x varía de $x = 0$ a $x = 1$; y varía de $y = 0$ a $y = x$; z varía de $z = 0$ a $z = 1 - x$. De acuerdo con esto:

$$
\begin{aligned}
\iiint_W (1-z^2)dx\ dy\, dz &= \iiint_{W_1} (1-z^2)dx\ dy\, dz + \iiint_{W_2} (1-z^2)dx\ dy\, dz \\
&= \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{1-y} (1-z^2)\, dz\, dy\, dx + \int_0^1 \int_0^x \int_0^{1-x} (1-z^2)\, dz\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_x^1 \left[z - \frac{1}{3}z^3\right]_0^{1-y} dy\, dx + \int_0^1 \int_x^1 \left[z - \frac{1}{3}z^3\right]_0^{1-x} dy\, dx \\
&= \int_0^1 \int_x^1 \left(\frac{2}{3} - y^2 + \frac{1}{3}y^3\right) dy\, dx + \int_0^1 \int_0^x \left(\frac{2}{3} - x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{12}y^4\right]_x^1 dx + \int_0^1 \left[\frac{2}{3}y - x^2 y + \frac{1}{3}x^3 y\right]_0^x dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{5}{12} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4\right) dx + \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x - x^3 + \frac{1}{3}x^4\right) dx \\
&= \frac{5}{12}x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{60}x^5\Big|_0^1 + \frac{1}{15}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^2\Big|_0^1 \\
&= \frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{3}{10}.
\end{aligned}
$$

2. Hallar el volumen del sólido acotado por las superficies $x^2+2y^2=2$, $z=0$ y $x+y+2z=2$.

   Solución: Note que x varía de $-\sqrt{2}$ a $\sqrt{2}$ (se obtiene haciendo $y=0$ en la primera superficie). Al despejar y en la ecuación $x^2+2y^2=2$ se obtiene $y=\pm\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}$, por lo tanto y varía de $y=-\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}$ a $y=\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}$. Al despejar z de la ecuación $x+y+2z=2$ se obtiene $z=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y$, de modo que z varía de $z=0$ a $z=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y$. Así, el volumen pedido es

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}}^{\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}}\int_0^{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y} dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}}^{\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}} \left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right) dy\,dx \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left[y-\frac{1}{2}xy-\frac{1}{4}y^2\right]_{-\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}}^{\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}} dx \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x)\sqrt{1-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \sqrt{2}\,\pi.
\end{aligned}$$

   Para ésta última integral se toma la sustitución $x=\sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta)$ y el integrando es la expresión $(2-\sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta))\sqrt{2}\cos^2(\theta)$, y como x varia en $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ entonces θ pertenece a $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Hallar el volumen de la región acotada por $z=x^2+y^2$ y $z=10-x^2-2y^2$.

   Solución: Para ver cómo se proyecta el sólido sobre el plano xy, se determina la intersección entre ambas superficies; como z está despejada en ambas ecuaciones entonces:

$$x^2+y^2=10-x^2-2y^2$$

   Esta ecuación es equivalente a $2x^2+3y^2=10$; así, la proyección de la intersección del sólido sobre el plano xy es la región elíptica formada por los puntos (x,y) tales que $2x^2+3y^2\le 10$. Así, se tiene que x varía de $x=-\sqrt{5}$ a $x=\sqrt{5}$ (estos valores se obtienen al hacer $y=0$ en la ecuación de la elipse), y varía de $y=-\sqrt{\frac{1}{3}(10-2x^2)}$ a $y=\sqrt{\frac{1}{3}(10-2x^2)}$ (esto se obtiene al despejar y en la ecuación de la elipse), z va de $z=x^2+y^2$ a $z=10-x^2-2y^2$ (estas son las ecuaciones de las superficies dada). Entonces, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{\frac{1}{3}(10-2x^2)}}^{\sqrt{\frac{1}{3}(10-2x^2)}} \int_{x^2+y^2}^{10-x^2-2y^2} dz\,dy\,dx \\ &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{5-x^2}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{5-x^2}} \left(10-2x^2-3y^2\right) dydx \\ &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left[10y-2x^2y-y^3\right]_{-\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{5-x^2}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{5-x^2}} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(\frac{40}{3}-\frac{8}{3}x^2\right)\sqrt{5-x^2}dx = \frac{25}{3}\sqrt{6}\pi. \end{aligned}$$

Aquí otra vez hay que hacer una sustitución trigonométrica adecuada.

4. Sea W la región limitada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$ y $z=x+y$,

   (a) Hallar el volumen de W.

   (b) Calcular $\displaystyle\iiint_W x\,dxdydz$.

   (c) Calcular $\displaystyle\iiint_W y\,dxdydz$.

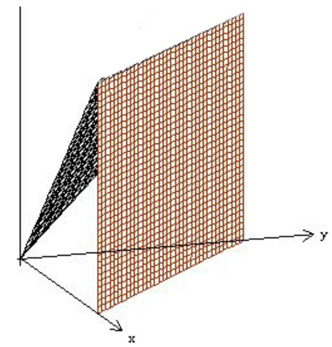

Figura 10: Región para el ejemplo 4.

Solución:

(a) El volumen de W es:

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} dz\,dy\,dx = \frac{1}{3}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \iiint_W x\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} x\,dz\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2+xy\right) dydx \\ &= \int_0^1 \left[x^2y+\frac{1}{2}xy^2\right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x\right) dx \\ &= -\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{4}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\iiint_W y\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} y\,dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(xy + y^2\right) dydx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3\right) dx \\
&= \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos

1. Evalúe la integral $\iiint_B x^2 y\,dx\,dy\,dz$, donde B es el tetraedro de vértices $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,1)$.

2. Calcule $\iiint_S x\,dx\,dy\,dz$, donde S es el sólido acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y $z = 1$.

3. $\iiint_S e^z\,dx\,dy\,dz$, donde S es la región descrita por las desigualdades $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq x + y$.

4. Calcule el volumen del sólido limitado por $y = 9 - x^2$, $z = 0$, $z = y$.

5. Determine el volumen del sólido limitado por el paraboloide $x^2 + 3y^2 = z$, y por el cilindro $y^2 + z = 4$.

6. En la integral $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$, cambie el orden de integración para que las diferenciales queden en el orden $dx\,dy\,dz$.

Capítulo 6. La fórmula de cambio de variables y aplicaciones a la integración

6.1 Cambio de variables en las integrales múltiples

En esta sección se realiza un breve estudio de las funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ desde el punto de vista geométrico. En particular, se muestra cómo una función de este tipo cambia una región del plano en otra. Es importante leer detenidamente los ejemplos 6.1 y 6.2.

Luego define dos conceptos ya conocidos para las funciones en general:

- El concepto de función *uno a uno* que no es más que el concepto de inyectividad de funciones ya conocido:

  > T es uno a uno (inyectiva) si cualesquiera dos elementos diferentes, en el dominio, tienen imagen diferente.

- El concepto de función *sobre*, que es lo que conocemos como función sobreyectiva:

  > Todo elemento en el codominio tiene al menos una preimagen.

También es importante el teorema 1, que se refiere a un caso particular de funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$: las llamadas *aplicaciones lineales*, que son aquellas del tipo

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy),$$

donde a, b, c y d son constantes. La importancia de ellas radica en que convierten paralelogramos en paralelogramos, con correspondencia de los vértices.

Estas funciones, se estudiaron en el curso de Álgebra Lineal pues resulta que estas aplicaciones lineales son uno a uno (y también sobre) si y solo si $ad - bc = 0$ (recuerde que $ad - bc$ es el determinate $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$).

Se recomienda realizar todos los ejercicios propuestos.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, página de la 366 (357)

1. Probar que $T(x^*, y^*) = \left(\dfrac{x^* - y^*}{\sqrt{2}}, \dfrac{x^* - y^*}{\sqrt{2}}\right)$ rota el cuadrado unitario $D^* = [0,1] \times [0,1]$.

   Solución: Observe que T es de la forma $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, con $a = -b$, $a = c = d$ y $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, por lo tanto es lineal. Esto significa que envía el paralelogramo D^* en otro paralelogramo. Para ver cuál es este otro paralelogramo basta calcular la imagen de los vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ de D^*; se tienen:

   $$T(0,0) = 0, \quad T(0,1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad T(1,1) = (0, \sqrt{2}), \quad T(1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

   La imagen D de D^* es el cuadrado de vértices $(0,0)$, $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(0, \sqrt{2})$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, que se obtiene al rotar D^* un ángulo de $45°$.

2. Sea D^* el paralelogramo acotado por las rectas $y = 3x - 4$, $y = 3x$, $2y = x$ y $2y = x + 4$. Si $D = [0,1] \times [0,1]$ encontrar T tal que $T(D^*) = D$.

   Solución: Se define D^* como el paralelogramo determinado por las rectas

   $$① \; y = \frac{1}{2}x, \quad ② \; y = 3x, \quad ③ \; = \frac{1}{2}x + 2, \quad ④ \; y = 3x - 4y$$

   Se define $D = [0,1] \times [0,1]$. Se pide hallar una transformación T tal que $T(D^*) = D$.

   Los vértices de D^* están dados por las intersecciones de las rectas. Las rectas señaladas con ① y ② tienen, evidentemente, intersección en $(0,0)$. Para determinar la intersección entre las rectas ① y ④ se hace $\dfrac{1}{2}x = 3x - 4$, por lo que $x = \frac{8}{5}$ y, sustituyendo en la ecuación de cualquiera de ellas dos se obtiene que $y = \frac{4}{5}$; así, la intersección entre ellas es $\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$. Procediendo de modo análogo se obtiene que la intersección entre las rectas ② y ③ es $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$ y la intersección entre las rectas ③ y ④ es $\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$.

Como T debe transformar un paralelogramo en otro, se hace T lineal; es decir T se puede escribir como $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ y se encuentran los valores de a, b, c y d. Según lo que el ejercicio pide, y como T es lineal debe enviar vértices a vértices.

- Los vértices de D^* son $(0,0)$, $\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$, $\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$, $\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
- Los vértices de D son $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$.
- Entonces:

$$T(0,0) = (0,0), \quad T\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right) = (0,1), \quad T\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right) = (1,1), \quad T\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) = (1,0)$$

- $T\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right) = (0,1) \Rightarrow \left(\frac{4}{5}a + \frac{12}{5}b, \frac{4}{5}c + \frac{12}{5}d\right) = (0,1)$ y, por lo tanto:

$$\frac{4}{5}a + \frac{12}{5}b = 0 \tag{15}$$
$$\frac{4}{5}c + \frac{12}{5}d = 1 \tag{16}$$

- $T\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) = (1,0) \Rightarrow \left(\frac{8}{5}a + \frac{4}{5}b, \frac{8}{5}c + \frac{4}{5}d\right) = (1,0)$ y, por lo tanto:

$$\frac{8}{5}a + \frac{4}{5}b = 1 \tag{17}$$
$$\frac{8}{5}c + \frac{4}{5}d = 1 \tag{18}$$

- Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (15) y (17) se obtiene los valores $a = \frac{3}{4}$ y $b = -\frac{1}{4}$. Y con el sistema formado por (16) y (18) se obtiene $c = -\frac{1}{4}$ y $d = \frac{1}{2}$.

De todo lo anterior se concluye que la transformación pedida es

$$T(x,y) = \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y, -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y\right).$$

Nota: Verifique que, además, se tiene $T\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right) = (1,1)$; si esto no se cumpliera esta T no funcionaría.

6.2 El teorema del cambio de variables

El tema central es el teorema 2, que se refiere a cómo cambia la integral si se efectúa un cambio de variables.

El teorema establece que si dada una función $f : D \to \mathbb{R}$ y T una transformación uno a uno de clase C^1 (esto es, existen las derivadas parciales y éstas son derivables) tal que $T(D^*) = D$, entonces T induce un cambio de variables en la integral y se tiene

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv,$$

donde:

- La transformación T se escribe como $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$.
- $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ es el *Jacobiano* de la transformación T; y se define como

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Como caso particular se comenta, en el ejemplo 1, el cambio a coordenadas polares. Estas son muy útiles para el cálculo de ciertas integrales doble, especialmente cuando la región de integración tiene que ver con círculos.

La transformación para las coordenadas polares es $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$; es decir:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

y el jacobiano es r. Observe que en este caso se utiliza r y θ en lugar de u y v. Comprender el significado geométrico de estas nuevas variables, facilita determinar los límites de integración cuando realiza este cambio. Para un punto (x,y) en el plano sus coordenadas polares vienen dadas por lo siguiente:

- Se sabe que r representa la longitud del segmento de extremos $(0,0)$ y (x,y); por lo tanto $r^2 = \sqrt{x^2+y^2}$.
- Luego, θ representa el ángulo entre la parte positiva del eje x y el segmento de extremos $(0,0)$ y (x,y); por lo tanto $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$.

La transformación inducida por las coordenadas polares transforma un círculo centrado en $(0,0)$, de radio a, en el rectángulo $R = [0,a] \times [0,2\pi]$, de manera que, por ejemplo, la integral $\iint_C f(x,y)\,dx\,dy$, donde C es la región limitada por la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio a se convierte en $\displaystyle\int_0^a \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\, r\,d\theta\,dr$, cuando se cambia a coordenadas polares.

Cambio de variables para integrales triples

También se proporciona una fórmula análoga para el cambio de variables para integrales triples:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw,$$

donde:

- La transformación T se determina mediante la ecuaciones $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ y $z = z(u,v,w)$.
- $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ es el *jacobiano* de la transformación T; y se define como

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Se consideran dos cambios de variables muy útiles para las integrales triples.

- *Coordenadas cilíndricas*: $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$; el jacobiano de estas coordenadas es r.

  El significado geométrico es el siguiente: dado un punto (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$, r es la longitud del vector que va de $(0,0,0)$ a $(x,y,0)$ en el plano xy; θ es el ángulo que se forma (sobre el plano xy) entre la parte positiva del eje x y el vector $(x,y,0)$; z es el mismo z de las coordenadas rectangulares.
- *Coordenadas esféricas*: $x = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta$, $y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$, $z = \rho\cos\phi$; el jacobiano de estas coordenadas es $-\rho^2\operatorname{sen}\phi$ (cuando se hace el cambio de variables en la integral se escribe $\rho^2\operatorname{sen}\phi$ pues se considera el valor absoluto del jacobiano).

  El significado geométrico es el siguiente: dado un punto (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$, ρ es la longitud del vector que va de $(0,0,0)$ a (x,y,z) en el plano xy; θ es el ángulo que se forma (sobre el plano xy) entre la parte positiva del eje x y el vector $(x,y,0)$; ϕ es el ángulo que se forma entre la parte positiva del eje z y el vector (x,y,z).

Para una descripción detallada, y dibujos explicativos, sobre las coordenadas cilíndricas y esféricas vea la sección 1.4 del texto.

En esta sección se recomienda realizar todos los ejercicios.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, páginas de la 380 a la 383 (372-375)

1. Calcular $\iint_R \frac{1}{x+y} dydx$, donde R es la región acotada por $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $x+y=4$, usando la función $T(u,v)=(u-uv,uv)$.

   Solución: En la figura adjunta se representa la región dada y se buscará una región R^* tal que $T(R^*)=R$.
   La función T induce el cambio de variables dado por

   $$x = u - uv \tag{19}$$
   $$y = uv \tag{20}$$

   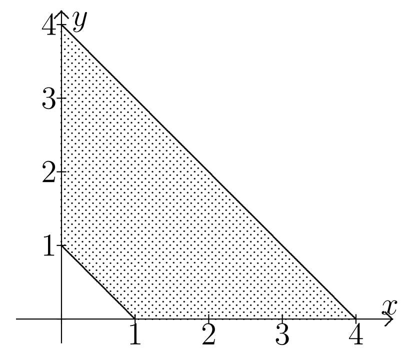

   Figura 11: Región del ejemplo 1

   El jacobiano de esta transformación es

   $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u - uv + uv = u.$$

   Enseguida de detallará cómo se obtiene la región R^*. Recuerde que R está acotada por $x=0$, $y=0$, $x+y=1$, $x+y=4$; entonces considere cada una de estas cotas:

   - Cuando $x=0$, sustituyendo en (19) se tiene $0=u-uv$, entonces $v=1$ (el caso $u=0$ no sirve porque entonces tendríamos $y=0$ y el punto $(0,0)$ no está en R).
   - Cuando $y=0$, sustituyendo en (20) se tiene $0=uv$, entonces $v=0$ (el caso $u=0$ no sirve porque entonces tendríamos $x=0$ y el punto $(0,0)$ no está en la región).
   - Si se suma (19) y (20) se obtiene $x+y=u$, de modo que cuando $x+y=1$ se tiene $u=1$ y cuando $x+y=4$ se tiene $u=4$.
   - De lo anterior, la región R^* está acotada por las rectas $v=0$, $v=1$, $u=1$ y $u=4$.

   Como u es positivo en la región R^*, entonces $|u|=u$ y se tiene que

   $$\iint_R \frac{1}{x+y}\,dy\,dx = \iint_{R^*} \frac{1}{u}\,u\,du\,dv = \int_0^1 \int_1^4 du\,dv = 3.$$

2. Sea D el disco unitario. Expresar $\iint_D (1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dxdy$ como una integral sobre el rectángulo $[0,1]\times[0,2\pi]$ y evaluar.

   Solución: De acuerdo con el enunciado, se debe cambiar a coordenadas polares. Recuerde que están determinadas por

   $$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

   El disco unitario se refiere al conjunto de puntos (x,y) en $\mathbb{R}^2$ tales que $x^2+y^2 \leq 1$ (el círculo centrado en $(0,0)$ y de radio 1. Como dijimos en el resumen, mediante las coordenadas polares este círculo se convierte en el rectángulo $[0,1] \times [0,2\pi]$. Por otra parte, al pasar a coordenadas polares se tiene:

$$(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = (1+r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}} = (1+r^2)^{\frac{3}{2}}$$

y, como el jacobiano es $r > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\iint_D (1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} dx\,dy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1+r^2)^{\frac{3}{2}} r\,d\theta\,dr \\ &= 2\pi \int_0^1 (1+r^2)^{\frac{3}{2}} r\,dr = \pi \int_1^2 u^{\frac{3}{2}}\,du = \frac{8\sqrt{2}-2}{5}\pi.\end{aligned}$$

Nota: Para calcular la integral $\int_0^1 (1+r^2)^{\frac{3}{2}} r\,dr$ se hizo el cambio de variable $u = 1+r^2$.

3. Evaluar $\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$, donde A está determinado por $x^2+y^2 \leq 1$ y $x+y \geq 1$.

Solución: La región A es la parte sombreada en la figura adjunta. Se puede utilizar coordenadas polares para simplificar el cálculo. Se debe echar mano al significado geométrico para determinar los límites de integración en las nuevas variables. Observamos que para los puntos $P(x,y)$ en la región se tiene que el ángulo que forma la parte positiva del eje x y el vector $\overrightarrow{OP}$ varía entre 0 y $\frac{\pi}{2}$; es decir, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Para cada uno de estos ángulos el punto P va desde la recta $x+y=1$ hasta la circunferencia $x^2+y^2=1$; al pasar a polares, la ecuación de la recta se convierte

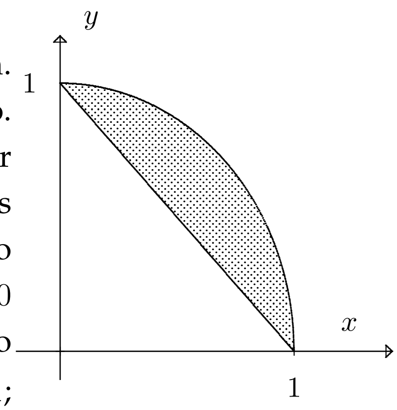

Figura 12: Región A del ejemplo 3.

en $r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta = 1$ (sustituyendo x por $r\cos\theta$ y y por $r\operatorname{sen}\theta$), por lo tanto $r = \frac{1}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$.

Por otra parte, la circunferencia se convierte en $r=1$. Así, $\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta} \leq r \leq 1$.

Al pasar a polares la función integrando se tiene:

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{(r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)^2} = \frac{1}{r^4}$$

y, como el el jacobiano es r, entonces se tiene

$$\begin{aligned}\iint_A \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}^{1} \frac{1}{r^4}\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}^{1} \frac{1}{r^3}\,dr\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{r^2}\right]_{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}^{1} d\theta \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2\right]d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4. Evaluar, usando coordenadas cilíndricas, la integral $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\,dy\,dz$, donde D es la región determinada por $\frac{1}{2}\le z\le 1$, $x^2+y^2+z^2\le 1$.

Solución: Recuerde que las coordenadas cilíndricas están determinadas por

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\operatorname{sen}\theta,\quad z = z.$$

La región de integración es la porción de la esfera centrada en $(0,0,0)$, de radio 1, que queda entre los planos $z=\frac{1}{2}$ y $z=1$.

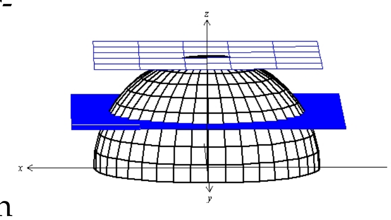

Figura 13: Región entre planos.

Para ver los límites de integración en coordenadas cilíndricas recurrimos al significado geométrico de estas coordenadas. Se debe considerar la proyección de la región sobre el plano xy para ver cómo varían r y θ. Esta proyección se determina haciendo $z=\frac{1}{2}$ en la ecuación de la esfera: $x^2+y^2+\frac{1}{4}\le 1$; por lo tanto $x^2+y^2\le\frac{3}{4}$. La proyección es el círculo centrado en $(0,0)$, de radio $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; por lo tanto, θ varía entre 0 y 2π y r varía entre 0 y $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Mientras tanto, z varía desde $\frac{1}{2}$, hasta la superficie $x^2+y^2+z^2=1$, que, pasando a polares se convierte en $r^2+z^2=1$ y, por lo tanto $z=\sqrt{1-r^2}$ (se toma la parte positiva porque z es positivo).

Al pasar la función integrando a coordenadas cilíndricas se tiene

$$(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = (r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

y, como el jacobiano es r, se tienen:

$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-r^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\,dz\,dr\,d\theta.$$

Calculando la integral de adentro se obtiene

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-r^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}dz = r\ln\left(\sqrt{(1-r^2)}+1\right) + r\ln 2 - r\ln\left(1+\sqrt{(4r^2+1)}\right) \tag{21}$$

Luego, al calcular la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-r^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}dzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{16}d\theta = \frac{\pi}{4}$

5. Evaluar $\displaystyle\iiint_E \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$, donde E es el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1$.

Solución: Un primer cambio de variable puede convertir el elipsoide en una esfera:

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cw.$$

Observe que, con este cambio se tiene

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2u^2}{a^2}+\frac{b^2v^2}{b^2}+\frac{c^2w^2}{c^2} = u^2+v^2+w^2.$$

De modo que el integrando en las nuevas variables es $u^2+v^2+w^2$ y la región de integración es la esfera $S: u^2+v^2+w^2\leq 1$. El jacobiano de esta transformación es

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

Luego, puesto que abc es positivo, se tiene

$$\iiint_E \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz = \iiint_S \left(u^2+v^2+w^2\right)(abc)\,du\,dv\,dw$$

El cálculo de esta nueva integral se facilita si se trabaja en coordenadas esféricas:

$$u = \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \quad v = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \quad w = \rho\cos\phi.$$

El valor absoluto del jacobiano es $\rho^2\operatorname{sen}\phi$ y la función integrando es

$$\begin{aligned} u^2+v^2+w^2 &= \rho^2\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta+\rho^2\cos^2\phi \\ &= \rho^2\operatorname{sen}^2\phi(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)+\rho^2\cos^2\phi \\ &= \rho^2\operatorname{sen}^2\phi+\rho^2\cos^2\phi \\ &= \rho^2. \end{aligned}$$

Para la esfera unitaria, se tiene que ρ varía de 0 a 1, θ varía de 0 a 2π y ϕ varía de 0 a π.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\iiint_S \left(u^2+v^2+w^2\right)(abc)\,du\,dv\,dw &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 abc\rho^4 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi \\ &= \frac{1}{5}abc\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\phi\,d\theta\,d\phi \\ &= \frac{2}{5}abc\pi\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\phi\,d\phi = \frac{4}{5}abc\pi\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

1. Calcule $\iint_{D^*}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)^4 dx\,dy$, donde D^* es la región triangular acotada por la recta $x+y=1$ y los ejes coordenados. Use la transformación $x=\dfrac{1}{2}(u+v)$, $y=\dfrac{1}{2}(v-u)$.

2. Use coordenadas polares para evaluar $\iint_D \dfrac{1}{a^2+x^2+y^2}\,dx\,dy$, donde D es el conjunto de pares ordenados tales que $x^2+y^2\leq a^2$ (con a una constante positiva).

3. Use coordenadas polares para evaluar $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde D es la región acotada por la parte positiva del eje x, la recta $y=x$ y la circunferencia $x^2+y^2=16$.

4. Use coordenadas polares para evaluar $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, donde D es la región que queda comprendida entre los círculos $(x-1)^2+y^2=1$ y $x^2+(y-1)^2=1$.

5. Utilice coordenadas cilíndricas para calcular $\iiint_R (x^4+2x^2y^2+y^4)\,dx\,dy\,dz$, donde R es el sólido limitado por el cilindro $x^2+y^2\leq a^2$, con $0\leq z\leq \dfrac{1}{\pi}$.

6. Utilice coordenadas cilíndricas para calcular $\iiint_S z(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\,dy\,dz$, donde S es el sólido acotado por arriba por el plano $z=2$ y por abajo por la superficie $2z=x^2+y^2$.

7. Evalúe $\iiint_S \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, donde S es la esfera $x^2+y^2+z^2\leq a^2$.

8. Evalúe $\iiint_S z^2\,dx\,dy\,dz$, donde S es el sólido limitado por abajo por el plano $z=1$ y por arriba por la esfera $x^2+y^2+z^2\leq 4$.

6.3. Aplicaciones de las integrales dobles y triples

Esta sección establece una serie de fórmulas que permiten determinar cantidades físicas relacionadas con láminas (regiones en el plano) y sólidos (regiones en el espacio). Estas cantidades son: promedio de una función, masa, centro de masa y momentos de inercia. Estas fórmulas son fáciles de comprender, aplicar y recordar y deben ser aprendidas.

Los ejercicios recomendados son los que van del 1 al 14.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, páginas de la 394 a la 396 (384-386)

1. Hallar el promedio (o media como lo indica el libro) de $f(x,y) = e^{x+y}$ sobre el triángulo con vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

   Solución: Si T es el triángulo indicado, el promedio de f viene dado por

$$[f]_{\text{prom}} = \frac{\iint_T e^{x+y}\,dx\,dy}{\iint_T \,dx\,dy}$$

   Esto significa que hay que calcular dos integrales y realizar su cociente. En ambos casos la región de integración es T y, de acuerdo con la figura, x va de $x=0$ a $x=1$ y y va de $y=0$ a $y=1-x$ (esta es la ecuación de la recta que pasa por $(1,0)$ y $(0,1)$). Entonces:

$$\iint_T dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-x} dy\,dx = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2},$$

$$\iint_T e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{1-x} e^{x+y}dy\,dx = \int_0^1 (e-e^x)\,dx = 1.$$

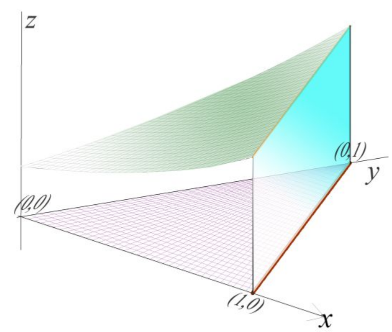

Figura 14: Gráfica de $f(x,y) = e^{x+y}$.

   Luego, $[f]_{\text{prom}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

2. Hallar el centro de masa del sólido acotado por el cilindro $x^2+y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2+y^2$, si la densidad es $\delta = \sqrt{x^2+y^2}$.

   Solución: Empleando coordenadas cilíndricas se puede observar que θ varía de $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ a $\theta = \dfrac{\pi}{2}$; r va de $r=0$ a la curva $x^2+y^2 = 2x$, que puesta en coordenadas cilíndrica corresponde a $r = 2\cos\theta$; z va de $z=0$ a la superficie cónica $z^2 = x^2+y^2$, que puesta en coordenadas cilíndricas corresponde a $z = r$.

La masa $\delta = \sqrt{x^2+y^2}$ en coordenadas cilíndricas es $\delta = r$ y el jacobiano de la transformación es r. En conclusión, la masa de S es:

$$\begin{aligned} M = \iiint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{r} r^2\,dz\,dr\,d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^3 dr d\theta \\ &= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\ &= \cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}\,2\theta + \frac{3}{2}\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

3. Hallar el momento de inercia alrededor del eje y para la bola $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$, si la densidad de masa es una constante k.

   Solución: El momento de inercia con respecto al eje y es

$$I_y = \iiint_B k(x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

   donde B es la bola indicada.

   Utilizamos coordenadas esféricas para facilitar el cálculo:

$$x = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta, \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = \rho\cos\phi.$$

   Al pasar a coordenadas esféricas, la bola B se convierte en la región tal que $\theta \in [0, 2\pi]$, $\phi \in [0,\pi]$ y $\rho \in [0, R]$. La función integrando es:

$$k(x^2+z^2) = k(\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi\cos^2\theta + \rho^2\cos^2\phi) = k\rho^2(\mathrm{sen}^2\,\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi).$$

   El valor absoluto del jacobiano es $\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi$, por lo tanto

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} k\rho^4\,\mathrm{sen}\,\phi(\mathrm{sen}^2\,\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi)\,d\rho\,d\theta\,d\phi \\ &= \frac{1}{5}R^5k\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\mathrm{sen}^3\,\phi\cos^2\theta + \mathrm{sen}\,\phi\cos^2\phi)\,d\theta d\phi \\ &= \frac{R^5}{5}k\int_0^{\pi}\pi\,\mathrm{sen}\,\phi(1+\cos^2\phi)d\phi = \frac{8}{15}R^5k\pi. \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

1. Determine el promedio de la función $f(x,y) = e^x y^{-\frac{1}{2}}$ sobre la región R del primer cuadrante acotada por $y = x^2$, $x = 0$, $y = 1$.

2. Determine el centro de masa de una lámina que cubre la región del plano determinada por $x^2 + y^2 \leq 9$, $y \geq 0$, con función de densidad $\delta(x,y) = x^2 + y^2$.

3. Determine el centro de masa de una lámina que cubre la región del plano limitada por la gráfica de $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$ con densidad $\delta(x,y) = x^{-1}$.

4. Determine el momento de inercia con respecto al eje x y con respecto al eje y de la región R acotada por la parábola $y = x^2$ y las rectas $x = 2$, $y = 1$.

5. Determine el momento de inercia con respecto al eje z del tetraedro sólido S de vértices $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(0,0,1)$, con densidad $\delta(x,y,z) = x$.

Capítulo 7. Integrales sobre curvas y superficies

7.1. y 7.2. Integrales de trayectoria e integrales de línea

Hasta aquí se conoce, en cuanto a integración, los siguientes tipos de integral:

- *La integral definida (unidimensional)*: la función integrando es $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; el conjunto sobre el que se integra es un intervalo $[a, b]$ de números reales.
- *La integral doble*: la función integrando es $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; el conjunto sobre el que se integra es una región R del plano.
- *La integral triple*: la función integrando es $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; el conjunto sobre el que se integra es una región S del espacio.

Observe que en los tres casos, la función integrando es un campo escalar (funciones cuyo dominio es $\mathbb{R}$).

En estas secciones se consideran otros tipos de integral:

- *La integral de trayectoria*: la función integrando es $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (con $n = 2$ o $n = 3$); el conjunto sobre el que se integra es una trayectoria σ (que produce una curva) en el plano o en el espacio.

- *La integral de línea*: la función integrando es $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (con $n = 2$ o $n = 3$); el conjunto sobre el que se integra es una trayectoria σ (que produce una curva) en el plano o en el espacio.

Observe que en ambos casos el conjunto sobre el que se integra corresponde a una trayectoria y la función integrando puede ser un campo escalar (integral de trayectoria) o un campo vectorial (integral de línea).

Dado que las trayectorias son parametrizaciones de curvas, y no hay una única manera de parametrizar una curva, deben tenerse ciertos cuidados con este tipo de integrales; especialmente en el caso de las integrales de línea.

Considere una trayectoria $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ (de clase C^1), tal que $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, entonces se definen:

LA INTEGRAL DE TRAYECTORIA del campo escalar $f(x, y, z)$ (con valores en $\mathbb{R}$) mediante

$$\int_\sigma f\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\|\sigma'(t)\|\, dt$$

LA INTEGRAL DE LÍNEA del campo vectorial $F(x, y, z)$ (con valores en $\mathbb{R}^3$) mediante

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\, dt$$

Observe que en principio, según la definición, el valor de la integral dependerá tanto de la función integrando como de la trayectoria sobre la que se integra.

Recuerde que una curva puede ser determinada por varias trayectorias. Con el propósito de realizar algunos comentarios al respecto se analizará nuevamente el caso del arco de parábola de la página 17 de esta guía de estudio.

Considere el arco C de la parábola dada por la ecuación $y = x^2$, con puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Las tres trayectorias siguientes producen este arco:

$$\begin{aligned} \sigma : [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, t^2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \gamma : [0,2] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{1}{2}t, \frac{1}{4}t^2\right) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \delta : [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (1-t, (1-t)^2) \end{aligned}$$

Suponga que una hormiga recorre la curva C siguiendo la trayectoria σ; la velocidad en este caso es $\sigma'(t) = (1, 2t)$. En el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (que se obtiene haciendo $t = \frac{1}{2}$), la velocidad de la hormiga es $\sigma'\left(\frac{1}{2}\right) = (1, 1)$.

Si la hormiga recorre C según la trayectoria γ, entonces la velocidad en cada punto de la trayectoria es $\gamma'(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}t\right)$. En este caso, el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ se obtiene cuando $t = 1$ y, entonces, la velocidad en ese punto es $\gamma'(1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Es decir, la velocidad de la hormiga sobre la curva depende de la trayectoria.

Si la hormiga recorre C, siguiendo σ, entonces parte del punto $\sigma(0) = (0,0)$ y de esta forma llega al punto $\sigma(1) = (1,1)$. Mientras tanto, si la recorre siguiendo la trayectoria δ, parte del punto $\delta(0) = (1,1)$ y llega al punto $\delta(1) = (0,0)$. Es decir, recorre la curva en sentido opuesto al anterior. Verifique usted que γ va en el mismo sentido que σ.

Las tres trayectorias dadas son diferentes *parametrizaciones* de la misma curva; se dice que cada una es reparametrización de las otras. Siguiendo con el ejemplo, se dice que γ preserva la parametrización de σ y que δ invierte la parametrización de σ.

¿Qué efectos tiene una reparametrización en el resultado de una integral de línea o de trayectoria? El asunto del cambio de velocidad a la hora de reparametrizar no tiene ningún efecto en el valor de la integral de línea o de trayectoria, pero el cambio de orientación cambia el signo en la integral de línea aunque en la de trayectoria no afecta. Es decir, si σ es una trayectoria C^1 y γ es una reparametrización de σ, entonces:

LA INTEGRAL DE TRAYECTORIA del campo escalar $f(x,y,z)$ no cambia; es decir:

$$\int_\sigma f(x,y,z)\,ds = \int_\gamma f(x,y,z)\,ds$$

LA INTEGRAL DE LÍNEA del campo vectorial $F(x,y,z)$ no cambia si las dos parametrizaciones tienen la misma orientación y cambia de signo si tienen orientaciones opuestas; es decir

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_\gamma F \cdot ds$$

si tienen la misma orientación

$$\int_\sigma F \cdot ds = -\int_\gamma F \cdot ds$$

si tienen orientaciones opuestas

Lo anterior permite definir integrales de trayectoria e integrales de línea sobre una curva simple; vea las definiciones correspondientes en el texto. Se debe tener presente que las integrales de trayectoria y de línea se definen sobre curvas suaves o suaves a trozos y que no tienen autointersecciones.

Se da también un teorema, que es una generalización del teorema fundamental del cálculo, que establece que la integral de línea de un campo vectorial gradiente ∇f está determinada por el valor de f en los puntos finales de la trayectoria.

Finalmente, si una curva se puede parametrizar por pedazos, la integral de línea sobre esa curva es igual a la suma de las integrales de línea sobre cada uno de los pedazos de la curva, teniendo el cuidado necesario en las orientaciones de las parametrizaciones.

La fórmula de longitud de arco de σ que se estudió en la sección 4.2 es sencillamente la integral de trayectoria $\int_\sigma ds$.

Por otra parte, es posible calcular el promedio de una función sobre una curva C, la masa de C o su centro de masa, utilizando fórmulas análogas a las dadas para regiones planas y en el espacio. Así, el valor promedio de $f(x,y,z)$, a lo largo de la trayectoria σ es

$$[f]_{\text{prom}} = \frac{\int_\sigma f(x,y,z)ds}{\int_\sigma ds}.$$

La masa de C, siendo $\delta(x,y,z)$ la densidad, es

$$m(C) = \int_C \delta(x,y,z)ds.$$

De la lista de ejercicios de la sección 7.1. debe realizar los ejercicios del 1 al 14 y de la sección 7.2. realice los ejercicios del 1 al 17.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, páginas de la 416 a la 419, 435 a la 438 (400-402, 417-421)

1. (a) Mostrar que la integral de trayectoria de $f(x,y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Solución: Las coordenadas polares vienen dadas por $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, entonces se tiene $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$.

Por otra parte, $x'(\theta) = \dfrac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta$ y $y'(\theta) = \dfrac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta$, entonces

$$\sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta\right)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2},$$

por lo tanto, la integral de trayectoria indicada es

$$\int_\sigma f(x,y)ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

(b) Calcular la longitud de arco de $r = 1+\cos\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Solución: Para $r = 1+\cos\theta$, se tiene $\dfrac{dr}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta$; por lo tanto,

$$\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{(1+\cos\theta)^2+(-\operatorname{sen}\theta)^2} = \sqrt{2+2\cos\theta}.$$

La curva correspondiente a la longitud de arco es un cardioide como se muestra en la figura, entonces se puede calcular la longitud para $\theta \in [0,\pi]$ y multiplicar por 2; es decir, la longitud del cardioide es

$$2\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\theta}d\theta = 2\left[4\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta\right]_0^\pi = 2\cdot 4 = 8.$$

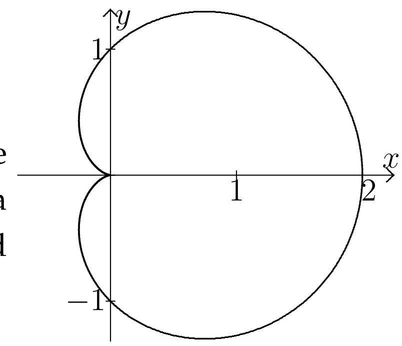

Figura 15: Cardioide

2. Evaluar $\int_\sigma f\,ds$, donde $f(x,y,z) = z$, $\sigma(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, t)$, para $0 \le t \le t_0$.

Solución: Se tiene: $\sigma'(t) = (\cos t - t\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + t\cos t, 1)$, entonces

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + t\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2+t^2}.$$

Por otra parte, $f(\sigma(t)) = f(t\cos t, t\operatorname{sen} t, t) = t$, por lo que

$$\int_\sigma f\,ds = \int_0^{t_0} f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|\,dt = \int_0^{t_0} t\sqrt{2+t^2}dt = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2+t^2}\right)^3\Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2+t_0^2}\right)^3 - \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

3. Evaluar $\int_\sigma yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, donde σ está formada por los segmentos de recta que unen a $(1,0,0)$ con $(0,1,0)$ y $(0,1,0)$ con $(0,0,1)$.

Solución: Los dos segmentos de recta: C_1: de $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$ y C_2: de $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$.

El primero de ellos se puede parametrizar de la siguiente manera:

$$\sigma_1(t) = (1-t, t, 0), \quad 0 \le t \le 1.$$

El segundo se puede parametrizar así:

$$\sigma_2(t) = (0, 1-t, t), \quad 0 \le t \le 1$$

Nota: En general una parametrización útil de un segmento de recta que va del punto A al punto B se obtiene mediante $\sigma(t) = (1-t)A + tB$ con $0 \leq t \leq 1$. Observe que si se hace $t = 0$ se obtiene $\sigma(0) = (1-0)A + 0B = A$ (el primer punto) y si $t = 1$, entonces $\sigma(1) = (1-1)A + 1B = B$ (el segundo punto). Esto fue lo que se hizo para parametrizar C_1 y C_2.

Para $\sigma_1(t)$ se tiene:

$$x = 1-t \Rightarrow dx = -dt \qquad y = t \Rightarrow dy = dt \qquad z = 0 \Rightarrow dz = 0.$$

Entonces, en este caso, $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$.

Para $\sigma_2(t)$ se tiene:

$$x = 0 \Rightarrow dx = 0 \qquad y = 1-t \Rightarrow dy = -dt \qquad z = t \Rightarrow dz = dt.$$

Entonces, también en este caso, $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$.

Se concluye que la integral pedida es igual a 0.

4. (a) Sea σ una trayectoria suave. Supóngase que F es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$, mostrar que $\int_\sigma F \cdot ds = 0$

   Solución: Si F es perpendicular a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$, entonces $F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = 0$, por lo tanto

$$\int_\sigma F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt = \int_a^b 0\,dt = 0.$$

   (b) Si F es paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$, mostrar que $\int_\sigma F \cdot ds = \int_\sigma \|F\| ds$

   Solución: Si F es paralelo a $\sigma'(t)$ en $\sigma(t)$, entonces existe $\lambda(t) > 0$ tal que $F(\sigma(t)) = \lambda(t)\,\sigma'(t)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_\sigma F \cdot ds &= \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt = \int_a^b \lambda(t)\sigma'(t) \cdot \sigma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b \lambda(t)\|\sigma'(t)\|^2\,dt \end{aligned} \tag{22}$$

   Nota: recuerde que para cualquier vector v se tiene $v \cdot v = \|v\|^2$.

   Por otro lado, dado que $F(\sigma(t)) = \lambda(t)\,\sigma'(t)$, entonces $\|F\| = \lambda(t)\|\sigma'(t)\|$. Luego, la integral de trayectoria de $\|F\|$ es

$$\int_\sigma \|F\| ds = \int_a^b \lambda(t)\|\sigma'(t)\|\|\sigma'(t)\|\,dt = \int_a^b \lambda(t)\|\sigma'(t)\|^2\,dt \tag{23}$$

De (22) y (23) se obtiene que, para la situación dada, la integral de línea de F a lo largo de σ, es igual a la integral de trayectoria de $\|F\|$ a lo largo de σ, tal como pide el ejercicio.

5. Evaluar $\int_\sigma F \cdot ds$, donde $F(x,y,z) = y\,i + 2x\,j + y\,k$, $\sigma(t) = t\,i + t^2\,j + t^3\,k$, $0 \le t \le 1$.

   Solución: Se tiene que $F(\sigma(t)) = F(t,t^2,t^3) = (t^2, 2t, t^2)$. Además, $\sigma'(t) = (1, 2t, 3t^2)$; por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_\sigma F \cdot ds &= \int_0^1 F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\,dt \\
&= \int_0^1 (t^2, 2t, t^2) \cdot (1, 2t, 3t^2)\,dt \\
&= \int_0^1 (t^2 + 4t^2 + 3t^4)\,dt \\
&= \int_0^1 (5t^2 + 3t^4)\,dt = \left[\frac{5}{3}t^3 + \frac{3}{5}t^5\right]_0^1 \\
&= \frac{5}{3} + \frac{3}{5} = \frac{34}{15}.
\end{aligned}$$

6. Sea $F = (z^3 + 2xy)i + x^2\,j + 3xz^2\,k$. Mostrar que la integral de línea de F a lo largo del perímetro del cuadrado de vértices $(\pm 1, \pm 1)$ es cero.

   Solución: Se puede optar por parametrizar el cuadrado considerado (se hace a trozos, una parametrización para cada lado; algo parecido al ejemplo 7.13 de la sección 7.2, página 433) y evaluar la integral directamente.

   Sin embargo, en este caso particular, funciona mejor la aplicación del teorema 3 (sección 7.2). Como en el caso de un cuadrado o de cualquier curva simple cerrada, la trayectoria inicia en un punto, suponga A y termina en el mismo punto A, entonces, si el integrando es un gradiente (digamos $F = \nabla f$); según el teorema mencionado, se tiene que la integral de ∇f sobre esa curva es igual a $f(A) - f(A) = 0$ (de paso, esta argumentación da respuesta al ejercicio 14 de la sección 7.2: el valor de la integral de un campo gradiente sobre una curva cerrada es igual a 0).

   Basta entonces ver que el F de este ejercicio es un gradiente. Observe que si toma la función $f(x,y,z) = z^3x + x^2y$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x} = z^3 + 2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2$ y $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2$; es decir $F = \nabla f$. Se concluye que la integral pedida es igual a 0.

Ejercicios propuestos

1. Calcule la integral de trayectoria de $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+xy+y^2}{z^2}$ sobre la trayectoria dada por $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -1)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.

2. Evalúe $\int_C f(x,y)\,ds$, donde C es el segmento de parábola $y = 4x^2$, que va del punto $(1,4)$ al punto $(0,0)$.

3. Evalúe $\int_C (5xy\,dx + 10yz\,dy + z\,dz)$, donde C es el segmento de recta que va de $(0,0,0)$ al punto $(1,1,1)$.

4. Evalúe la integral de línea del campo $F(x,y,z) = (y-2z, x, -2xy)$ siguiendo la trayectoria $\sigma(t) = (t, t^2, -1)$ para $1 \leq t \leq 2$.

5. Evalúe $\int_\sigma F \cdot ds$, donde $F = -3y\,i + 3x\,j + 3x\,k$ y σ es la trayectoria recta que va de $(0,0,1)$ a $(1,1,1)$.

6. Evalúe $\int_\sigma F \cdot ds$, donde $F = z\,i + y\,j + x\,k$ y σ es el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ recorrido en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

7.3 y 7.4 Superficies parametrizadas y área de superficies

Se define una superficie como una función $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

(la superficie se parametriza utilizando dos parámetros), con ciertas condiciones. Como en las curvas, la imagen de $\Phi(D)$ de una superficie parametrizada (la función) es un objeto geométrico llamado superficie S.

Si Φ es diferenciable en un punto (u_0, v_0), se definen los vectores tangentes

$$T_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\,i + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\,j + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\,k$$
$$T_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\,i + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\,j + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\,k$$

Se dice que la superficie es *suave* en $\Phi(u_0,v_0)$ si el producto vectorial $T_u \times T_v \neq (0,0,0)$ en (u_0,v_0).

El plano tangente a la superficie en $\Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ tiene ecuación:

$$(x - x_0, y - y_0, z_0) \cdot (T_u \times T_v) = 0,$$

donde $T_u \times T_v$ se evalúa en (u_0, v_0).

Encontrar una parametrización para una superficie dada es en general más difícil que encontrara una parametrización para una curva dada; esto por cuanto para la superficie se requieren dos parámetros (u y v), mientras que para la curva solamente es necesario uno (t).

En vista de lo anterior, solamente se considerarán las superficies parametrizadas que ya vienen dadas en el texto.

El área $A(S)$ de una superficie parametrizada es

$$A(S) = \iint_D \|T_u \times T_v\| \, du \, dv.$$

Observe que esta definición es la análoga a la longitud de arco para el caso de las curvas; $T_u \times T_v$ juega un papel parecido al de σ'.

Cuando la superficie S corresponde a la imagen de una función de dos variables $z = f(x, y)$, el área puede calcularse mediante

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \; dx \, dy.$$

Ejercicios recomendados para la sección 7.3 del 1 al 15 y de la sección 7.4 del 1 al 22.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, páginas de la 446 a la 447 (427-429) y de la 457 a la 460 (438-440)

1. Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie dada por $x = u^2 - v^2$, $y = u + v$, $z = u^2 + 4v$, en $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2\right)$.

   Solución: Primero se debe determinar el punto (u_0, v_0) que produce $x = -\frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 2$ (que son las coordenadas del punto de tangencia). Entonces, (u_0, v_0) se obtiene resolviendo el sistema

$$-\frac{1}{4} = u_0^2 - v_0^2, \quad \frac{1}{2} = u_0 + v_0, \quad 2 = u_0^2 + 4v_0.$$

En este caso particular se obtiene que $u_0 = 0$ y $v_0 = \dfrac{1}{2}$.

Ahora se debe calcular T_u, T_v, evaluarlos en $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ y determinar el vector normal $T_u \times T_v$:

$$
\begin{aligned}
T_u &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = (2u, 1, 2u) \qquad \Rightarrow \qquad T_u\left(0, \frac{1}{2}\right) = (0, 1, 0)\\
T_v &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) = (-2v, 1, 4) \qquad \Rightarrow \quad T_v\left(0, \frac{1}{2}\right) = (-1, 1, 4)\\
T_u \times T_v\left(0, \frac{1}{2}\right) &= (0, 1, 0) \times (-1, 1, 4) = (4, 0, 1)
\end{aligned}
$$

Luego, la ecuación del plano viene dada por

$$\left(x + \frac{1}{4}, y - \frac{1}{2}, z - 2\right) \cdot (4, 0, 1) = 0;$$

es decir, $4x + z = 1$.

2. Hallar una expresión para el vector unitario normal a la superficie

$$x = (2 - \cos v)\cos u, \quad y = (2 - \cos v)\operatorname{sen} u, \quad z = \operatorname{sen} v$$

para $u \in [-\pi, \pi]$ y $v \in [-\pi, \pi]$. Identificar la superficie, ¿es suave?

Solución: Se tiene:

$$
\begin{aligned}
T_u &= \left(\frac{\partial}{\partial u}x, \frac{\partial}{\partial u}y, \frac{\partial}{\partial u}z\right) = (-(2 - \cos v)\operatorname{sen} u, (2 - \cos v)\cos u, 0)\\
T_v &= \left(\frac{\partial}{\partial v}x, \frac{\partial}{\partial v}y, \frac{\partial}{\partial v}z\right) = (\operatorname{sen} v\cos u, \operatorname{sen} v\operatorname{sen} u, \cos v)
\end{aligned}
$$

Entonces, el vector normal es

$$
\begin{aligned}
T_u \times T_v &= (-(2 - \cos v)\operatorname{sen} u, (2 - \cos v)\cos u, 0) \times (\operatorname{sen} v\cos u, \operatorname{sen} v\operatorname{sen} u, \cos v)\\
&= \big(2\cos u\cos v - \cos u\cos^2 v, 2\operatorname{sen} u\cos v - \operatorname{sen} u\cos^2 v, -2\operatorname{sen} v + \operatorname{sen} v\cos v\big)
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
\|T_u \times T_v\| &= \big\|\big(2\cos u\cos v - \cos u\cos^2 v, 2\operatorname{sen} u\cos v - \operatorname{sen} u\cos^2 v, -2\operatorname{sen} v + \operatorname{sen} v\cos v\big)\big\|\\
&= \sqrt{(2\cos u\cos v - \cos u\cos^2 v)^2 + (2\operatorname{sen} u\cos v - \operatorname{sen} u\cos^2 v)^2 + (-2\operatorname{sen} v + \operatorname{sen} v\cos v)^2}\\
&= 2 - \cos v
\end{aligned}
$$

Luego, el vector normal unitario es

$$\begin{aligned}\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} &= \frac{(2\cos u\cos v - \cos u\cos^2 v, 2\operatorname{sen} u\cos v - \operatorname{sen} u\cos^2 v, -2\operatorname{sen} v + \operatorname{sen} v\cos v)}{2-\cos v} \\ &= (\cos u\cos v, \operatorname{sen} u\cos v, -\operatorname{sen} v)\end{aligned}$$

Para identificar la superficie haga $x = 0$; entonces, $x = (2-\cos v)\cos u = 0$. Por lo tanto, $\cos u = 0$, luego $u = \dfrac{\pi}{2}$. Sustituyendo en $y = (2-\cos v)\operatorname{sen} u$ se tiene

$$y = (2-\cos v)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2-\cos v$$

Dado que $\operatorname{sen} v = z$, entonces $\operatorname{sen}^2 v = z^2$ y, por lo tanto $\cos v = \sqrt{1-z^2}$.

De aquí se tiene que $y = 2-\cos v = 2-\sqrt{1-z^2}$ y, elevando al cuadrado y arreglando se obtiene: $(y-2)^2+z^2 = 1$, es decir, el corte de la superficie con el plano yz es la circunferencia $(y-2)^2+z^2 = 1$. Usted puede convencerse de que el corte de la superficie con cualquier plano de ecuación $y = ax$ es una circunferencia de radio 1 (como la anterior) y centro en $(x_0, ay_0, 0)$. Es decir, la superficie es un toro con centro en $(0,0)$ que se obtiene al hacer girar la circunferencia $(y-2)^2+z^2 = 1$ alrededor del eje z.

Por último, como $T_u\times T_v = (\cos u\cos v(2-\cos v), \operatorname{sen} u\cos v(2-\cos v), \operatorname{sen} v(-2+\cos v))$, entonces la expresión $2-\cos v$ nunca puede hacerse 0, $\cos u\cos v = 0$ si $u = \dfrac{\pi}{2}$ o $v = \dfrac{\pi}{2}$, en esta situación la segunda componente se hace 0, pero la tercera no; es decir para cualesquiera u y v se tiene $T_u\times T_v \neq (0,0,0)$ por lo que la parametrización es suave.

3. Se perfora un hoyo cilíndrico de radio 1 a través de una bola sólida de radio 2 para formar una junta anular (vea la figura 7.4.9 en el texto). Hallar el volumen de la junta y el área de su superficie exterior.

   Solución: La esfera está dada por la ecuación $x^2+y^2+z^2 = 4$ y el cilindro por $x^2+y^2 = 1$. Primero se determina donde se cortan: el cilindro es $x^2+y^2 = 1$ y, sustituyendo en la ecuación de la esfera $1+z^2 = 4$, se obtiene que $z = \pm\sqrt{3}$. Esto dice que se cortan en los planos $z = \sqrt{3}$ y $z = -\sqrt{3}$.

   Ahora se calculará el volumen de la mitad superior y este resultado se multiplicará por 2. Observe que la proyección de esa mitad superior, sobre el plano xy es $x^2+y^2 = 4$ (haciendo $z = 0$). Entonces, usando coordenadas cilíndricas se tiene que $\theta\in[0,2\pi]$, $r\in[1,2]$ (el 1 es el radio del cilindro y el 2 es el radio de la proyección); z va de $z = 0$ hasta la superficie esférica que, en coordenadas cilíndricas es $r^2+z^2 = 4$; es decir $z = \sqrt{4-r^2}$ (se toma la parte positiva porque se está utilizando la parte positiva del eje z). En conclusión, el volumen de la figura es

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta = 4\sqrt{3}\pi.$$

El área de la superficie se calcula en dos partes: la de adentro que es el área de un segmento de cilindro y la de afuera que es un aro de la esfera.

El cilindro interior tiene radio de la base 1 y altura $2\sqrt{3}$, por lo que su área es $2\pi\cdot 1\cdot 2\sqrt{3}$ o en forma simplificada $4\pi\sqrt{3}$.

Para el área de afuera se calcula el área de la mitad de arriba y se multiplica por 2; para esto se usará la parametrización

$$x = 2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\quad y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\quad z = 2\cos\phi$$

(el 2 que aparece como coeficiente es el radio de la esfera). Para determinar dónde varían los parámetros θ y ϕ, note que la proyección sobre el plano xy es una circunferencia, por lo que $\theta\in[0,2\pi]$; mientras que la proyección sobre el plano yz es el triángulo de vértices $(0,0,0)$, $(0,1,\sqrt{3})$ y $(0,1,0)$. El ángulo ϕ que forma el vector $(0,1,\sqrt{3})$ es $\dfrac{\pi}{6}$, por lo tanto $\phi\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Para esta parametrización se tiene

$$\begin{aligned}\|T_\theta\times T_\phi\| &= \|(-2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, 2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, 0)\times(2\cos\theta\cos\phi, 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi, -2\,\mathrm{sen}\,\phi)\|\\ &= \left\|\left(-4\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\phi, -4\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}^2\,\phi, -4\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi\right)\right\|\\ &= \sqrt{16\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^4\,\phi + 16\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,\mathrm{sen}^4\,\phi + 16\,\mathrm{sen}^2\,\phi\cos^2\phi} = 4\,\mathrm{sen}\,\phi.\end{aligned}$$

Así, el área de la superficie exterior de la figura es

$$2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta = 16\pi\left[-\cos\phi\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 8\pi\sqrt{3}.$$

El área total de la superficie es la suma de las dos áreas obtenidas:

$$A = 4\pi\sqrt{3} + 8\pi\sqrt{3} = 12\pi\sqrt{3}.$$

Ejercicios propuestos

1. Determine el área de la superficie $z = 1 - \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ sobre $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $z=0$.
2. Determine el área de la superficie cónica $z=\sqrt{x^2+y^2}$ interior al cilindro $x^2+y^2=1$.
3. Calcule el área de la superficie determinada por el plano $2x+3y+6z=6$ ubicada en el primer octante.

7.5 y 7.6 Integrales de superficie

Igual que las integrales de línea, se definen dos tipos de integral de superficie. Si S es una superficie parametrizada por $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ con $(u,v) \in D$, se define:

La INTEGRAL DE SUPERFICIE DEL CAMPO ESCALAR $f(x,y,z)$ sobre S como

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(\Phi(u,v))\|T_u \times T_v\|\, du\, dv$$

La INTEGRAL DE SUPERFICIE DEL CAMPO VECTORIAL $F(x,y,z)$ sobre Φ como

$$\iint_\Phi F \cdot dS = \iint_D F \cdot (T_u \times T_v)\, du\, dv$$

Observe que en el caso de una integral de un campo escalar se indica que es sobre la superficie, mientras que en el caso de un campo escalar se dice que es sobre la parametrización. La razón es que no importa cómo se parametrice la superficie, la integral del campo escalar no cambia; mientras que la integral de un campo vectorial cambia de signo si se cambia la orientación de la superficie.

Al depender de dos parámetros, las dificultades en el asunto de la orientación de superficies son mayores que en el caso de las curvas (que dependen de solamente un parámetro).

Los intríngulis de la orientación de superficies pueden leerse en la sección 7.6 del texto y es importante tener claro que hay superficies que no se pueden orientar, estas tienen solo un lado, mientras que las superficie orientables tienen dos lados.

Si una superficie S está determinada por la gráfica de una función de dos variables $z = g(x,y)$, entonces:

La integral de superficie del campo escalar $f(x,y,z)$ sobre S se puede calcular mediante

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS = \iint_D \frac{f(x,y,g(x,y))}{\cos\theta}\, dx\, dy$$

donde θ es el ángulo que forma la normal a la superficie con la parte positiva del eje z en el punto $(x,y,g(x,y))$.

La integral de superficie del campo vectorial $F = (F_1, F_2, F_3)$ sobre S se puede calcular mediante

$$\iint_S F \cdot dS = \iint_D \left[\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) F_1 + \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) F_2 + F_3\right] dx\, dy$$

Se establece, además una relación entre integrales de superficie de campos escalares y campos vectoriales en el siguiente sentido:

> La integral de superficie del campo vectorial F sobre S es igual a la integral de superficie del campo escalar $F \cdot \vec{n}$ sobre S, donde $\vec{n}$ es el vector normal unitario que apunta al exterior de S (es decir, $\vec{n} = \dfrac{1}{\|T_u \times T_v\|}\,(T_u \times T_v)$).

Promedio de funciones sobre superficies, masas y centros de masa de superficie pueden calcularse con fórmulas análogas a las correspondientes para regiones, sólidos y curvas. Las integrales de superficie de campos vectoriales también miden el flujo de un fluido.

Ejercicios recomendados de la sección 7.5 del 1 al 15 y de la sección 7.6 se recomiendan todos.

Ejemplos resueltos tomados de la lista de ejercicios, páginas de la 465 a la 467 (446-448) y de las páginas de la 481 a la 483 (460-462)

1. Hallar la masa de una superficie S que tiene la forma de un hemisferio $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, con $0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$, siendo su densidad $m(x, y, z) = x^2 + y^2$.

   Solución: Dado que es un hemisferio (media esfera), se puede adaptar la parametrización dada por el ejercicio 1 de la sección 7.4, página 457, agregando un coeficiente R que es el radio del hemisferio:

   $$x = R\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad y = R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \quad z = R\cos\phi,$$

   con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\phi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (por ser la mitad superior de la esfera).

   La función de densidad es $m = x^2 + y^2 = (R\cos\theta\operatorname{sen}\phi)^2 + (R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)^2 = R^2\operatorname{sen}^2\phi$.

   Por otra parte: $\|T_\theta \times T_\phi\| = R^2 \operatorname{sen}\phi$ (haga los cálculos correspondientes). Entonces, la masa es

   $$\begin{aligned} M = \iint_S m(x, y, z)\, dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} m\|T_\theta \times T_\phi\|\, d\phi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (R^2\operatorname{sen}^2\phi)(R^2\operatorname{sen}\phi)\, d\phi\, d\theta \\ &= 2\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi = \frac{4}{3}R^4\pi. \end{aligned}$$

2. Hallar el área de superficie de la parte del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$, en el octante positivo ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Suponer $a > 0$.

   Solución: La integral se hace sobre la superficie $x^2 + z^2 = a^2$; el otro cilindro sirve para determinar donde varían los parámetros dados para parametrizar el cilindro indicado.

   Las coordenadas cilíndricas dan la idea de una parametrización, donde, en lugar de r se escribe a, pues es el radio del cilindro (es un valor fijo) y z y y cambian sus papeles pues es un cilindro "acostado" (cuyo eje es el eje z). Se hace:

$$x = a\cos\theta, \quad y = y, \quad z = a\operatorname{sen}\theta.$$

   La proyección de la superficie sobre el plano xy está determinada por la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 2ay$ ($x \geq 0$), entonces, θ varía de 0 a $\dfrac{\pi}{2}$ y y varía de la parte inferior de la semicircunferencia a la parte superior de la misma. Sustituyendo en la ecuación de la semicircunferencia la parametrización dada se tiene que $a^2\cos^2\theta + y^2 = 2ay$; luego, despejando y en términos de θ se tiene: $y = a \pm a\operatorname{sen}\theta$. En conclusión, y varía de $y = a - a\operatorname{sen}\theta$ a $y = a + a\operatorname{sen}\theta$.

   Por otra parte,

$$\begin{aligned}\|T_\theta \times T_y\| &= \|(-a\operatorname{sen}\theta, 0, a\cos\theta) \times (0,1,0)\| \\ &= \|(-a\cos\theta, 0, -a\operatorname{sen}\theta)\| = \sqrt{a^2\cos^2\theta + a^2\operatorname{sen}^2\theta} = a.\end{aligned}$$

   De esta manera, el área de la superficie es

$$\begin{aligned}A = \iint_S dS &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{a-a\operatorname{sen}\theta}^{a+a\operatorname{sen}\theta} a\,dy\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2a^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ &= 2a^2\,\cos\theta\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2.\end{aligned}$$

3. Evaluar $\iint_S (\nabla \times F)\cdot dS$, donde $F = (x^2 + y - 4)\,i + 3xy\,j + (2xz + z^2)\,k$ y S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$. (Hacer que n, la normal unitaria apunte hacia arriba).

   Solución: Dado que la superficie considerada es una semiesfera de radio 4 y se quiere que la normal unitaria apunte hacia arriba, la parametrización sugerida es:

$$x = 4\cos\theta\cos\phi, \quad y = 4\operatorname{sen}\theta\cos\phi, \quad z = 4\operatorname{sen}\phi,$$

donde $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\phi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (por ser media esfera).

Según esto,

$$\begin{aligned} T_\theta \times T_\phi &= (-4 \operatorname{sen} \theta \cos \phi, 4 \cos \theta \cos \phi, 0) \times (-4 \cos \theta \operatorname{sen} \phi, -4 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, 4 \cos \phi) \\ &= (16 \cos \theta \cos^2 \phi, 16 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \phi, 16 \operatorname{sen} \phi \cos \phi). \end{aligned}$$

Ahora se calcula $\nabla \times F$:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y - 4 & 3xy & 2xz + z^2 \end{vmatrix} = 0\, i - 2z\, j + (3y - 1)\, k$$

Evaluando $\nabla \times F$ en la parametrización se obtiene

$$\nabla \times F = 0\, i - 8 \operatorname{sen} \phi\, j + (12 \operatorname{sen} \theta \cos \phi - 1)\, k.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (\nabla \times F) \cdot (T_\theta \times T_\phi) &= (0, -8 \operatorname{sen} \phi, 12 \operatorname{sen} \theta \cos \phi - 1) \cdot (16 \cos \theta \cos^2 \phi, 16 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \phi, 16 \operatorname{sen} \phi \cos \phi) \\ &= 16(-8 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \phi \operatorname{sen} \phi + 12 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi - \operatorname{sen} \phi \cos \phi) \\ &= 16(4 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \phi \operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi \cos \phi). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int_S (\nabla \times F) \cdot dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\nabla \times F) \cdot (T_\theta \times T_\phi)\, d\phi\, d\theta \\ &= 16 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \phi \operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi \cos \phi)\, d\phi\, d\theta \\ &= 16 \int_0^{2\pi} \left[-\frac{4}{3} \cos^3 \phi \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \phi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 16 \int_0^{2\pi} \left(\frac{4}{3} \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{2} \right) d\theta = -16\pi. \end{aligned}$$

4. Un fluido uniforme que fluye verticalmente hacia abajo se describe mediante el campo vectorial $F(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Hallar el flujo a través del cono $z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

   Solución: Se puede parametrizar el cono mediante:

   $$x = u \cos v, \quad y = u \operatorname{sen} v, \quad z = u,$$

   donde $v \in [0, 2\pi]$, $0 \leq u \leq 1$ (u y v tienen el mismo significado geométrico que en las coordenadas cilíndricas).

Con esto,

$$T_u \times T_v = (\cos v, \operatorname{sen} v, 1) \times (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) = (-u \cos v, -u \operatorname{sen} v, u);$$

entonces $F \cdot T_u \times T_v = (0, 0, -1) \cdot (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) = (-u \cos v, -u \operatorname{sen} v, u) = -u$.

Luego, el flujo es

$$\iint_S F \cdot dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-u)\, dv\, du = -\pi.$$

5. En el ejercicio anterior, ahora $F = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, ¿cuál es ahora el flujo a través del cono?

   Solución: Ahora se tiene que

$$F \cdot T_u \times T_v = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-u \operatorname{sen} v, u \cos v, 0) = (-u \cos v, -u \operatorname{sen} v, u) = \frac{\sqrt{2}}{2}(u \cos v - u).$$

   El flujo es

$$\iint_S F \cdot dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}(u \cos v - u)\, dv\, du = -\frac{1}{2}\pi\sqrt{2}.$$

Ejercicios propuestos

1. Calcule la integral de superficie de $f(x, y, z) = 3x + 2y - 6$, sobre el cuarto de esfera dado por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
2. Determine la integral de superficie de $f(x, y, z) = x^2 y$, sobre la porción del plano con ecuación $2x + 3y - 5z = 1$ que se encuentra en el primer octante.
3. Calcule el valor promedio de la función $f(x, y, z) = x$, sobre la porción del plano $z = x$ cuya proyección en el plano xy es el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$.
4. Determine la integral de superficie de $F(x, y, z) = (x, y, z)$, sobre la superficie dada por $|x| + |y| + |z| = 1$, con las normales apuntando hacia el exterior.
5. Determine la integral de superficie de $F(x, y, z) = (z^2, 0, 0)$, sobre el semielipsoide superior $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$, $z \geq 0$, con las normales apuntando hacia el exterior.
6. Pruebe que el flujo del campo $F(x, y, z) = (ax, by, cz)$, donde a, b, c son números reales positivos, a través de la esfera con centro en el origen y radio $c > 0$, con sus normales apuntando hacia el exterior es iguala a $(a + b + c)V_e$, donde V_e es el volumen de la esfera.

Exámenes anteriores

Aquí se proporciona el enunciado de los exámenes aplicados en el 2003 y 2004 en los cuatrimestres que se ha ofrecido. Se le recomienda que intente resolverlos por su cuenta antes de mirar los esquemas de solución que encontrará en esta guía de estudio.

I Ordinario, PAC. 2004-2

Valor total: 50 puntos

Instrucciones: A continuación se le presentan siete ejercicios. Resuélvalos con orden y claridad. Se calificará el procedimiento, las operaciones y la respuesta final.

1. Determine los máximos y mínimos locales de la función dada por

$$F(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x + 4y. \qquad \text{(8 puntos)}$$

2. Determine el mínimo de $f(x, y, z) = x + y - z$, sujeto a la restricción

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = \frac{13}{3}. \qquad \text{(7 puntos)}$$

3. Una partícula se mueve siguiendo la trayectoria $c(t) = 2t^{\frac{3}{2}}\,\mathbf{i} + (t-3)\,\mathbf{j} + \sqrt{8}\,t\,\mathbf{k}$.

   (a) Determine su rapidez cuando $t = 8$. (3 puntos)

   (b) Determine la longitud del arco de la trayectoria para $3 \leq t \leq 15$. (3 puntos)

4. Sea $F(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$, y sea $G(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Calcule

$$\operatorname{div}(F \times \operatorname{rot} G). \qquad \text{(7 puntos)}$$

5. Sean a y b números reales con $a \neq 0$ o $b \neq 0$ y considere la trayectoria

$$c(t) = ((a+b)t^2, at^2),$$

definida para $t \geq 0$. Sea F el campo vectorial tal que

$$F(x,y) = \left(\sqrt{x}, \sqrt{y}\right)$$

para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Determine para qué valores de a y b se tiene que $c(t)$ es una línea de flujo para F. (7 puntos)

6. Evalúe $\displaystyle\iint_R xydxdy$, donde R es la región del primer cuadrante limitada por la curva $y = x^2$ y por las rectas $y = 0$, $y + x = 2$. (8 puntos)

7. Dada $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt[3]{x}} (x+y)dydx$, primero cambie el orden de integración y luego calcule la integral iterada obtenida después del cambio. (7 puntos)

II Ordinario, PAC. 2004-2

Valor total: 50 puntos

Instrucciones: A continuación se le presentan siete ejercicios. Resuélvalos con orden y claridad. Se calificará el procedimiento, las operaciones y la respuesta final.

1. Calcule

$$\iiint_R xdxdydz,$$

donde R es la región del espacio acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $6x + 3y + 2z = 6$. (6 puntos)

2. Sea T la transformación definida por $T(u,v) = (x,y)$, donde $x = 2u - v$, $y = u + 2v$.

   (a) Si D es el cuadrado, en las coordenadas xy, de vértices $(-5,0)$, $(0,-5)$, $(5,0)$, $(0,5)$, determine D^*, en las coordenadas uv, tal que $T(D^*) = D$. (4 puntos)

   (b) Calcule el *determinante jacobiano* de la transformación T. (2 puntos)

3. Use coordenadas polares para calcular

$$\int\int_S \sqrt{4-x^2-y^2}\, dxdy,$$

donde S es la región del primer cuadrante encerrada por el círculo $x^2+y^2=4$, y las rectas $y=0$, $y=x$. (6 puntos)

4. Considere la semiesfera sólida $x^2+y^2+z^2 \leq 1$, $z \geq 0$ y suponga que su densidad en cada punto es $\rho(x,y,z)=k$ (constante).

   (a) Calcule la masa (en términos de k) de dicha semiesfera. (3 puntos)

   (b) Determine la coordenada $\overline{z}$ del centro de masa de la semiesfera. (4 puntos)

5. Sea F el campo vectorial dado por $F(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + e^z\,\mathbf{k}$; sea c la trayectoria definida por $c(t) = t^3\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ con $t \in [0,3]$. Calcule la integral de línea

$$\int_c F \cdot d\mathbf{s}.$$ (7 puntos)

6. Sea S la superficie definida por $z = x + y^2$ sobre la región D dada por $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$. Calcule la integral de superficie

$$\int\int_S y\, dS.$$ (8 puntos)

7. Sea D el rectángulo, en el plano uv, definido por $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \pi$ y sea S la superficie definida por la parametrización $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$x = \cos u \operatorname{sen} v, \quad y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad z = \cos v.$$

   (a) Determine el vector normal a la superficie $n = T_u \times T_v$. (4 puntos)

   (b) Calcule $\iint_\Phi r \cdot dS$, donde $r(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. (6 puntos)

I Reposición, PAC. 2004-2

Valor total: 30 puntos

Instrucciones: A continuación se le presentan cinco ejercicios. Resuélvalos con orden y claridad. Se calificará el procedimiento, las operaciones y la respuesta final.

1. Sea $w(x,y,z) = xyz$.

   (a) Determine el máximo de w sujeto a la restricción $x+y+z=1$, con $x>0$, $y>0$ y $z>0$. (6 puntos)

   (b) Utilice la parte (a) para probar que si $x>0$, $y>0$, $z>0$, entonces $\sqrt[3]{xyz} \leq \dfrac{x+y+z}{3}$. (3 puntos)
   Ayuda: observe que $\dfrac{x}{x+y+z} + \dfrac{y}{x+y+z} + \dfrac{z}{x+y+z} = 1$.

2. Una partícula sigue la trayectoria $c(t) = (a\cos t)\mathbf{i} + (a \operatorname{sen} t)\mathbf{j} + (bt)\mathbf{k}$ donde a y b son números reales constantes.

   (a) Pruebe que la rapidez de la partícula es constante. (3 puntos)

   (b) Calcule la longitud de arco de la trayectoria para $t \in [0, 2\pi]$. (3 puntos)

3. Sea $F(x,y,z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$. Calcule $\operatorname{div}(F \times \operatorname{rot} F)$. (6 puntos)

4. Calcule la integral doble
$$\iint_R (y^2 - x^2)dxdy,$$
donde R es la región limitada por el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$.
(5 puntos)

5. Dada la integral iterada
$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy,$$
dibuje la región de integración y cambie el orden de integración. (4 puntos)

II Reposición, PAC. 2004-2

Valor total: 30 puntos

Instrucciones: A continuación se le presentan cinco ejercicios. Resuélvalos con orden y claridad. Se calificará el procedimiento, las operaciones y la respuesta final.

1. Use coordenadas cilíndricas para calcular

$$\int\int\int_R (2x - y)dxdydz,$$

donde R es la región del primer octante del espacio acotada por los planos $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, y por la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$. (5 puntos)

2. Use coordenadas polares para calcular

$$\int\int_S \frac{1}{4 + x^2 + y^2} dxdy,$$

donde S es la región del primer cuadrante encerrada por el círculo $x^2 + y^2 = 4$, y las rectas $y = 0$, $y = x$. (5 puntos)

3. Un bloque rectangular en el espacio está formado por todos los puntos (x, y, z) tales que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. La densidad en cada punto (x, y, z) del bloque es $\rho(x, y, z) = xy + z$. Calcule la masa del bloque. (5 puntos)

4. Sea C el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ orientado en sentido contrario al que giran las manecillas del reloj.

   (a) Obtenga una parametrización para C. (4 puntos)

   (b) Calcule $\int_C xdx + xy^2dy$. (4 puntos)

5. Sea S la superficie definida por $z = x^2 - y^2$ sobre la región D dada por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Evalúe

$$\int\int_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dS.$$ (7 puntos)

I Ordinario, PAC. 2003-2

Valor total: 40 puntos

Instrucciones: Resuelva los siete ejercicios que se le presentan a continuación. Se calificará el procedimiento y los diferentes pasos necesarios para probar o resolver lo que se pide.

1. Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$. (6 puntos)

2. Halle los puntos extremos de $f(x,y) = x + 2y$ sujeto a la condición $x^2 + y^2 = 5$. (6 puntos)

3. Sea $\mathbf{c}$ la trayectoria $\mathbf{c} = (2t, t^2, \ln t)$, definida para $t > 0$. Determine la longitud de arco de $\mathbf{c}$ entre los puntos $(2,1,0)$ y $(4,4,\ln 2)$. Nota: recuerde que $(\ln t)' = \dfrac{1}{t}$. (6 puntos)

4. Determine una relación entre m y n de manera que el campo vectorial
$$V(x,y,z) = \frac{my\mathbf{i} + nx\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$
sea irrotacional (es decir $\operatorname{rot} V = 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$). (6 puntos)

5. Pruebe que la curva $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, e^t)$ es una línea de flujo del campo vectorial velocidad $F(x,y,z) = (y, -x, z)$. (4 puntos)

6. Para la siguiente integral dibuje la región de integración y cambie el orden de integración:
$$\int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy.$$ (5 puntos)

7. Evalúe la integral doble $\int\int_D (x - 2y)dxdy$, donde D es el interior del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(10,1)$. (7 puntos)

II Ordinario, PAC. 2003-2

Valor total: 40 puntos

Instrucciones: Resuelva los seis ejercicios que se le presentan a continuación. Se calificará el procedimiento y los diferentes pasos necesarios para probar o resolver lo que se pide.

1. Una lámina delgada ocupa la región del plano acotada por la parábola $y = x^2$, y por las rectas $x = 2$, $y = 1$. La densidad de la lámina en cada punto (x,y) es $\rho(x,y) = y$. Determine la coordenada $\overline{x}$ del centro de masa de la lámina. (8 puntos)

2. Utilice coordenadas cilíndricas para evaluar la integral triple
$$\iiint_W x\, dxdydz$$
donde W es el sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y por el plano $z = 1$.(7 puntos)

3. Evalúe la integral triple
$$\iiint_W (x-y)\ dxdydz$$
donde W es el sólido descrito por las desigualdades $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$, $0 \le z \le x+y$.
(5 puntos)

4. Sea c la curva descrita por $c\colon \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ con $c(t) = (3\,\mathrm{sen}\, t, 3\cos t, t)$ y sea $f(x,y,z) = y - x + z$. Evalúe $\int_c f(x,y,z)\, ds$. (6 puntos)

5. Evalúe la integral de superficie
$$\iint_S (x+y-2z)dS$$
donde S es la superficie definida por $z = 6 + 2x + 3y$ sobre la región D dada por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$. (7 puntos)

6. Calcule la integral $\iint_\Phi F \cdot dS$, donde S es la superficie de la semibola $x^2+y^2+z^2 \le 1$, $z \ge 0$, y $F = x\,i + y\,j + z\,k$ (haga que la normal unitaria n apunte hacia abajo). (7 puntos)

I Reposición, PAC. 2003-2

Valor total: 24 puntos

Instrucciones: Resuelva los cuatro ejercicios que se le presentan a continuación. Se calificará el procedimiento y los diferentes pasos necesarios para probar o resolver lo que se pide.

1. Halle los puntos extremos de $f(x,y) = 3x + y + z$ sujeto a la condición $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
(7 puntos)

2. Sea c la trayectoria $c = (t, 2t, t+1)$. Determine la longitud de arco de c entre los puntos $(-1,-2,0)$ y $(1,2,2)$. (5 puntos)

3. Determine la divergencia y el rotacional del campo vectorial
$$F(x,y,z) = e^{xy}\mathbf{i} + e^{yz}\mathbf{j} + e^{zx}\mathbf{k}.$$
(5 puntos)

4. Evalúe la integral doble $\int\int_D (x^2 + 2xy)dxdy$, donde D es el interior del cuadrilátero de vértices $(0,2)$, $(0,4)$, $(2,2)$ y $(2,0)$. (7 puntos)

II Reposición, PAC. 2003-2

Valor total: 24 puntos. Vale 6 puntos cada ejercicio.

Instrucciones: Resuelva los cuatro ejercicios que se le presentan a continuación. Se calificará el procedimiento y los diferentes pasos necesarios para probar o resolver lo que se pide.

1. Determine el valor promedio de la función $f(x, y) = x^2y$ sobre la región D determinada por el semicírculo $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.

2. Utilice coordenadas cilíndricas para evaluar la integral triple

$$\int\int\int_W (x^2 + y^2)\, dxdydz$$

donde W es el sólido dado por $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2$.

3. Sea c la curva descrita por $c : [0, \frac{\pi}{2}] \to R^3$ con $c(t) = (3 \operatorname{sen} t, 3 \cos t, t)$ y sea $f(x, y, z) = 2y+3z$. Evalúe $\int_c f(x, y, z)\, ds$.

4. Evalúe la integral de superficie

$$\int\int_S (3x + y^2) dS$$

donde S es la superficie definida por $z = 2x - 5y$ sobre la región D dada por $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Soluciones de los exámenes

Se proporciona, a continuación, los esquemas de solución de los exámenes propuestos.

I Ordinario, PAC. 2004-2

1. (8 puntos) Se tienen que $\nabla F = (9x^2 - 9, 2y + 4)$. Igualando a $(0, 0)$ se obtiene que

$$\begin{aligned} 9x^2 - 9 &= 0 \\ 2y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene dos soluciones: $(1,-2)$ y $(-1,-2)$; estos son los puntos críticos. Vamos a aplicar el criterio dado por el teorema 6 (p. 208) a ambos puntos para determinar si corresponden a un máximo o a un mínimo. Para ello, primero se calculan las segundas derivadas parciales de F y el valor de D:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 18x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad D = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)^2 = 36x.$$

Para $(1,-2)$ se tiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(1,-2) = 18 > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad D = 36 > 0$$

Por lo tanto, F tiene un mínimo local en $(1,-2)$.

Para $(-1,-2)$ se tiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(-1,-2) = -18 < 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad D = -36 < 0$$

Por lo tanto, F no tiene ni máximo ni mínimo local en $(-1,-2)$ (es un punto de silla dado que $D < 0$).

2. (7 puntos) Utilizamos el método de los *multiplicadores de Lagrange* para determinar el mínimo. Para ello consideramos $g(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - \dfrac{13}{3}$ y establecemos la ecuación

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

Es decir:

$$(1,1,-1) = \lambda\,(4x, 6y, 8z)$$

De aquí, y de la restricción, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} 1 &= 4x\lambda \\ 1 &= 6y\lambda \\ -1 &= 8z\lambda \\ 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Evidentemente $\lambda \neq 0$, por lo tanto, de las tres primeras ecuaciones se tienen $x = \dfrac{1}{4\lambda}$, $y = \dfrac{1}{6\lambda}$,

$z = \dfrac{-1}{8\lambda}$. Sustituyendo esto en la última ecuación se tiene

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{4\lambda}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{6\lambda}\right)^2 + 4\left(\frac{-1}{8\lambda}\right)^2 &= \frac{13}{3} \Rightarrow \\ \frac{1}{8\lambda^2} + \frac{1}{12\lambda^2} + \frac{1}{16\lambda^2} &= \frac{13}{3} \Rightarrow \\ \frac{13}{48\lambda^2} &= \frac{13}{3} \Rightarrow \\ \lambda^2 &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda = \dfrac{1}{4}$ o $\lambda = -\dfrac{1}{4}$.

Si $\lambda = \dfrac{1}{4}$, entonces $x = 1$, $y = \dfrac{2}{3}$, $z = -\dfrac{1}{2}$.

Si $\lambda = -\dfrac{1}{4}$, entonces $x = -1$, $y = -\dfrac{2}{3}$, $z = \dfrac{1}{2}$.

Dado que $f\left(1, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{2}\right) = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{13}{6}$ y $f\left(-1, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}\right) = -1 - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{13}{6}$, se tienen que el máximo es $\dfrac{13}{6}$ y el mínimo es $-\dfrac{13}{6}$.

3. (a) (3 puntos) Se tiene que $c'(t) = (3\sqrt{t}, 1, \sqrt{8})$, luego $\|c'(t)\| = \sqrt{9t + 1 + 8} = \sqrt{9t + 9}$. La rapidez cuando $t = 8$ es $\|c'(8)\| = \sqrt{9 \cdot 8 + 9} = 9$.

   (b) (3 puntos) La longitud de arco viene dada por

$$L = \int_3^{15} \sqrt{9t + 9}\, dt = 3\int_4^{16} u^{\frac{1}{2}} du = 2u^{\frac{3}{2}}\Big|_4^{16} = 2(64 - 8) = 112 \text{ u.l.}$$

   (Se hizo la sustitución $u = t + 1$, $du = dt$).

4. (7 puntos). Primero se calcula el rotacional de G:

$$\operatorname{rot} G = \nabla \times (xyz, yz, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (xyz, yz, z) = (-y, xy, -xz)\,.$$

   Luego,

$$F \times \operatorname{rot} G = (x, y, xyz) \times (-y, xy, -xz) = \left(-xyz - x^2y^2z, -xy^2z + x^2z, x^2y + y^2\right)$$

   Finalmente,

$$\operatorname{div}(F \times \operatorname{rot} G) = \nabla \cdot \left(-xyz - x^2y^2z, -xy^2z + x^2z, x^2y + y^2\right) = -yz - 2xy^2z - 2xyz.$$

5. (7 puntos) Para que $c(t)$ sea una línea de flujo de F se debe tener que $c'(t) = F(c(t))$, para todo $t \geq 0$. Se tiene que $c'(t) = (2(a+b)t, 2at)$ y $F(c(t)) = \left(\sqrt{a+b}\,t, \sqrt{a}\,t\right)$.

   Luego, $c'(t) = F(c(t)) \Rightarrow (2(a+b)t, 2at) = \left(\sqrt{a+b}\,t, \sqrt{a}\,t\right) \Rightarrow$

   $$2(a+b) = \sqrt{a+b} \quad \text{o} \quad 2a = \sqrt{a}$$

   De $2a = \sqrt{a}$ se tiene que $4a^2 = a \Rightarrow a(4a-1) = 0$, de donde $a = 0$ o $a = \dfrac{1}{4}$.

   Sustituyendo $a = 0$ en $2(a+b) = \sqrt{a+b}$ se obtiene $2b = \sqrt{b}$, es decir $b = 0$ o $b = \dfrac{1}{4}$.

   Sustituyendo $a = \dfrac{1}{4}$ en $2(a+b) = \sqrt{a+b}$ se obtiene $2\left(\dfrac{1}{4}+b\right) = \sqrt{\dfrac{1}{4}+b}$, es decir $\dfrac{1}{4}+b = 0$ o $\dfrac{1}{4}+b = \dfrac{1}{4}$, por lo tanto $b = -\dfrac{1}{4}$ o $b = 0$.

   En conclusión, $c(t)$ es una línea de flujo de F si $(a,b) = \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ o $(a,b) = \left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$ o $(a,b) = \left(\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$. El caso $(a,b) = (0,0)$ está excluido por hipótesis.

6. (8 puntos) El punto del primer cuadrante en el que se corta la recta $y + x = 2$ con la parábola $y = x^2$ es $(1,1)$. Entonces y varía de 0 a 1 y x varía de la curva $y = x^2$ a la recta $y + x = 2$, es decir, de $\sqrt{y}$ a $2 - y$. La integral pedida es

   $$\begin{aligned}
   \iint_R xy\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} xy\,dx\,dy \\
   &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 y\Big|_{\sqrt{y}}^{2-y} dy \\
   &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y^3 - 5y^2 + 4y\right) dy \\
   &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}y^4 - \frac{5}{3}y^3 + 2y^2\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{24}.
   \end{aligned}$$

7. (7 puntos) La región de integración es la región encerrada por las curvas $y = x^2$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, que se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$. De manera que y va de 0 a 1 y x va de la curva $y = x^{\frac{1}{3}}$

a la curva $y = x^2$, es decir, x va de y^3 a $y^{\frac{1}{2}}$. La integral es,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x^2}^{x^{\frac{1}{3}}} (x+y)dydx &= \int_0^1 \int_{y^3}^{y^{\frac{1}{2}}} (x+y)dxdy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y + y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y^6 - y^4 \right) dy \\
&= \left(\frac{1}{4}y^2 + \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{14}y^7 - \frac{1}{5}y^5 \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{53}{140}
\end{aligned}$$

II Ordinario, PAC. 2004-2

1. (6 puntos) Evaluando $y = 0$, $z = 0$ en la ecuación $6x + 3y + 2z = 6$ se obtiene que $x = 1$, por lo tanto x va de $x = 0$ a $x = 1$. Evaluando $z = 0$ en la misma ecuación se obtiene $6x + 3y = 6$, es decir, $y = -2x + 2$; entonces y va de $y = 0$ a $y = -2x + 2$. Finalmente, despejando z en la ecuación del plano se tiene $z = -3x - \frac{3}{2}y + 3$, es decir, z varía de $z = 0$ a $z = -3x - \frac{3}{2}y + 3$. Así, la integral es

$$\begin{aligned}
\int\int\int_R xdxdydz &= \int_0^1 \int_0^{-2x+2} \int_0^{-3x-\frac{3}{2}y+3} xdzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^{-2x+2} \left(-3x^2 - \frac{3}{2}xy + 3x \right) dydx \\
&= \int_0^1 \left(-3x^2y - \frac{3}{4}xy^2 + 3xy \right) \Big|_0^{-2x+2} dx \\
&= \int_0^1 \left(3x^3 - 6x^2 + 3x \right) dx \\
&= \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

2. (a) (4 puntos) Se tiene que $T(u, v) = (2u - v, u + 2v)$. Dado que la transformación es lineal, entonces D^* es un cuadrilátero de vértices (u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), (u_4, v_4), donde $T(u_1, v_1) =$

$(-5,0)$, $T(u_2,v_2)=(0,-5)$, $T(u_3,v_3)=(5,0)$ y $T(u_4,v_4)=(0,5)$. Es decir,

$$\begin{aligned}(2u_1-v_1,u_1+2v_1) &= (-5,0)\\ (2u_2-v_2,u_2+2v_2) &= (0,-5)\\ (2u_3-v_3,u_3+2v_3) &= (5,0)\\ (2u_4-v_4,u_4+2v_4) &= (0,5)\end{aligned}$$

De aquí se tiene que $(u_1,v_1)=(-2,1)$, $(u_2,v_2)=(-1,-2)$, $(u_3,v_3)=(2,-1)$, $(u_4,v_4)=(1,2)$. Estos son los vértices de D^*.

(b) (2 puntos) El jacobiano es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5.$$

3. (6 puntos) Las coordenadas polares vienen dadas por $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$; el jacobiano de esta transformación es $J=r$. Por otra parte, $4-x^2-y^2=4-r^2$. De acuerdo con la figura se tiene que $r\in[0,2]$ (pues $x^2+y^2=4$ es una circunferencia de radio 2) y $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ pues la recta $y=0$ corresponde a $\theta=0$ y la recta $y=x$ corresponde a $\theta=\frac{\pi}{4}$. De todo esto, se tienen que

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_S\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy &= \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{4-r^2}\,rd\theta dr\\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^2\sqrt{4-r^2}\,rdr\\ &= \frac{\pi}{8}\int_0^4\sqrt{u}\,du\\ &= \frac{\pi}{8}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

(Nota: se hizo el cambio de variable $u=4-r^2$, $du=-2rdr$).

4. (a) (3 puntos) Se tiene que la masa es

$$M=\int\!\!\int\!\!\int_W k\,dxdydz,$$

donde W es la semiesfera indicada. Usando coordenadas esféricas se tiene que

$$\begin{aligned}M &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}k\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\phi d\rho d\theta\\ &= 2\pi k\cdot\frac{1}{3}\rho^3\Big|_0^1\cdot(-\cos\phi)|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}\pi k.\end{aligned}$$

(b) (4 puntos) Se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \frac{1}{M}\int\int\int_W zkdxdydz \\
&= \frac{3}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\cos\phi\rho^2 \operatorname{sen}\phi d\phi d\rho d\theta \\
&= \frac{3}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^1 \cdot \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

5. (7 puntos) Se tiene $c'(t) = (3t^2, -1, 1)$, $F(c(t)) = (t^3, -t^2, e^t)$, entonces

$$F(c(t))\cdot c'(t) = 3t^5 + t^2 + e^t.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_c F\cdot d\mathbf{s} &= \int_0^3 \left(3t^5 + t^2 + e^t\right) dt \\
&= \frac{1}{2}t^6 + \frac{1}{3}t^3 + e^t\Big|_0^3 = \frac{745}{2} + e^3.
\end{aligned}$$

6. (8 puntos) Se puede parametrizar la superficie mediante $\Phi(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x+y^2)\,\mathbf{k}$; entonces

$$\begin{aligned}
T_x &= (1,0,1) \\
T_y &= (0,1,2y) \\
T_x\times T_y &= (-1,-2y,1) \\
\|T_x\times T_y\| &= \sqrt{2+4y^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int\int_S ydS &= \int_{-1}^1\int_0^2 y\sqrt{2+4y^2}dydx \\
&= \frac{1}{8}\int_{-1}^1\int_2^{18} u^{\frac{1}{2}}dudx \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_2^{18} = \frac{26}{3}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

(Nota: se hizo el cambio de variable $u = 2+4y^2$, $du = 8ydy$).

7. (a) (4 puntos) Se tiene que

$$\begin{aligned} T_u &= (-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u \operatorname{sen} v, 0) \\ T_v &= (\cos u \cos v, \operatorname{sen} u \cos v, -\operatorname{sen} v) \\ n &= T_u \times T_v = \left(-\cos u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v \cos v - \cos^2 u \operatorname{sen} v \cos v\right) \\ &= \left(-\cos u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v, -\operatorname{sen} v \cos v\right) \end{aligned}$$

(b) (6 puntos) Observe que

$$\begin{aligned} r(u,v) &= (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v) \\ r(u,v) \cdot T_u \times T_v &= -\cos^2 u \operatorname{sen}^3 v - \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^3 v - \operatorname{sen} v \cos^2 v \\ &= -\operatorname{sen}^3 v - \operatorname{sen} v \cos^2 v = -\operatorname{sen} v. \end{aligned}$$

Luego

$$\iint_{\Phi} r \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (-\operatorname{sen} v) dv du = -4\pi.$$

I Reposición, PAC. 2004-2

1. (a) (6 puntos) Hacemos $\nabla w = \lambda \nabla g$, donde $g(x,y,z) = x + y + z - 1$. Se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} yz &= \lambda \\ xz &= \lambda \\ xy &= \lambda \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

De las tres primeras ecuaciones se obtiene $yz = xz$, $xz = xy$. Como x, y, z no son iguales a 0, entonces concluimos que $x = y = z$. Sustituyendo en la restricción: $x + x + x = 1$, es decir, $x = \dfrac{1}{3}$ y, por lo tanto, $x = y = z = \dfrac{1}{3}$. El máximo es $w\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$.

(b) (3 puntos). Dado que $\dfrac{x}{x+y+z} + \dfrac{y}{x+y+z} + \dfrac{z}{x+y+z} = 1$. De acuerdo con la parte (a),

$$w\left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right) \leq \frac{1}{27},$$

es decir

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+y+z}\cdot\frac{y}{x+y+z}\cdot\frac{z}{x+y+z} &\leq \frac{1}{27}\Rightarrow\\
\frac{xyz}{(x+y+z)^3} &\leq \frac{1}{27}\Rightarrow\\
xyz &\leq \frac{(x+y+z)^3}{27}\Rightarrow\\
\sqrt[3]{xyz} &\leq \frac{x+y+z}{3}.
\end{aligned}$$

2. (a) (3 puntos) Se tiene que $c'(t) = (-a\operatorname{sen} t, a\cos t, b)$, luego la rapidez es

$$\|c'(t)\| = \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2},$$

que es constante.

(b) (3 puntos) La longitud de arco es

$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

3. (6 puntos) Se tiene que $\operatorname{rot} F = \nabla\times F = \nabla\times(xy, yz, zx) = (-y,-z,-x)$.

Por otra parte, $F\times\operatorname{rot} F = (xy,yz,zx)\times(-y,-z,-x) = (-yzx+z^2x, -yzx+x^2y, -yzx+y^2z)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(F\times\operatorname{rot} F) &= \nabla\cdot\left(-yzx+z^2x, -yzx+x^2y, -yzx+y^2z\right)\\
&= -yz+z^2-zx+x^2-xy+y^2.
\end{aligned}$$

4. (5 puntos) Según vemos del dibujo, x va de $x=0$ a $x=1$ y y va de $y=x$ a $y=1$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\int\!\!\int_R (y^2-x^2)\,dxdy &= \int_0^1\int_x^1 (y^2-x^2)\,dydx\\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}y^3 - x^2y\right)\Big|_x^1 dx\\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - x^2 - \frac{1}{3}x^3 + x^3\right) dx\\
&= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4\Big|_0^1\\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

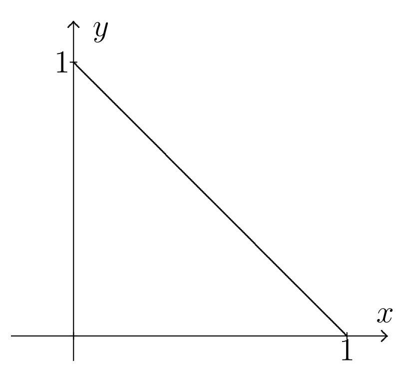

Figura 16: Problema 4.

5. (4 puntos) De acuerdo con la integral dada se tienen que y va de $y = 0$ a $y = 4$ y x va de $x = \frac{1}{2}y$ a $x = \sqrt{y}$. Esto corresponde a la región encerrada entre las curvas $y = 2x$, $y = x^2$ (que se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(2,4)$).

   Invirtiendo el orden de integración se obtiene que

$$\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)dydx.$$

II Reposición, PAC. 2004-2

1. (5 puntos) Las coordenadas cilíndricas vienen dadas por

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z;$$

   el jacobiano de esta transformación es r. La proyección de la región sobre el plano xy (equivalentemente, $z = 0$) es el cuarto de circunferencia del primer cuadrante dado por $x^2 + y^2 \leq 4$, por lo tanto, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $r \in [0,2]$; además, z varía de $z = 0$ a $z = 4 - r^2$. Por otra parte, $x - y = r(\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta)$; de este modo,

$$\begin{aligned}
\iiint_R (2x-y)dxdydz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} (2\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta)\, r^2 dzdrd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 (2\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta)\,(4r^2 - r^4)drd\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta) \left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{5}r^5\right)\Bigg|_0^2 d\theta \\
&= \frac{64}{15}\,(2\,\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64}{15}.
\end{aligned}$$

2. (5 puntos) Como se sabe las coordenadas polares vienen dadas por $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$; el jacobiano de esta transformación es $J = r$. Por otra parte, $\dfrac{1}{4 + x^2 + y^2} = \dfrac{1}{4 + r^2}$. De acuerdo con la figura se tiene que $r \in [0,2]$ (pues $x^2 + y^2 = 4$ es una circunferencia de radio 2) y $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ pues la recta $y = 0$ corresponde a $\theta = 0$ y la recta $y = x$ corresponde a $\theta = \frac{\pi}{4}$. De todo esto, se tiene que

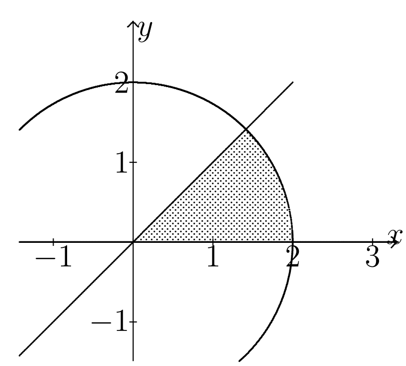

Figura 17: Problema 2.

$$\begin{aligned}
\int\int_S \frac{1}{4+x^2+y^2}dxdy &= \int_0^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4+r^2}\, rd\theta dr \\
&= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_4^8 \frac{1}{u}du \\
&= \frac{\pi}{8}\ln u\Big|_4^8 = \frac{\pi}{8}\ln 2.
\end{aligned}$$

(Nota: se hizo el cambio de variable $u = 4 + r^2$, $du = 2rdr$).

3. (5 puntos) La masa del bloque viene dada por

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (xy+z)dxdydz = \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{2}yx^2 + xz\right)\Big|_0^1 dydz \\
&= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{2}y + z\right) dydz = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}y^2 + zy\right)\Big|_0^1 dz \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{4} + z\right) dz = \frac{1}{4}z + \frac{1}{2}z^2\Big|_0^1 = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

4. (a) (4 puntos) Se puede parametrizar de varias maneras; en todos los casos, se debe parametrizar separadamente cada uno de los lados del triángulo. Sean $A(0,0)$, $B(2,0)$ y $C(2,2)$.

   La parametrización más evidente es la siguiente:

   - $\overline{AB}$: $c_1(t) = (t, 0)$ con $t \in [0, 2]$
   - $\overline{BC}$: $c_2(t) = (2, t)$ con $t \in [0, 2]$
   - $\overline{AC}$: $c_3(t) = (-t, -t)$ con $t \in [-2, 0]$

   (b) (4 puntos) Para c_1 se tienen $x = t$, $y = 0$, por lo que $dx = dt$, $dy = 0$ y, entonces $xdx + xy^2dy = tdt$; para c_2 se tienen $x = 2$, $y = t$, por lo que $dx = 0$, $dy = dt$ y, entonces, en este caso, $xdx + xy^2dy = 2t^2dt$; para c_3 se tienen $x = -t$, $y = -t$, por lo que $dx = -dt$, $dy = -dt$ y, entonces $xdx + xy^2dy = (-t)(-dt) + (-t)(-t)^2(-dt) = (t + t^3)dt$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_C xdx + xy^2dy &= \int_{C_1}\left(xdx + xy^2dy\right) + \int_{C_2}\left(xdx + xy^2dy\right) + \int_{C_3}\left(xdx + xy^2dy\right) \\
&= \int_0^2 t\,dt + \int_0^2 2t^2dt + \int_{-2}^0 (t+t^3)dt \\
&= \frac{1}{2}t^2\Big|_0^2 + \frac{2}{3}t^3\Big|_0^2 + \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4\right]_{-2}^0 = 2 + \frac{16}{3} - 2 - 4 = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

5. (7 puntos) Se puede parametrizar la superficie mediante $\Phi(x, y) = xi + yj + (x^2 - y^2)k$, entonces $T_x = (1, 0, 2x)$, $T_y = (0, 1, -2y)$, $T_x \times T_y = (-2x, 2y, 1)$, por lo tanto

$$\|T_x \times T_y\| = \|(-2x, 2y, 1)\| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dS &= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(1 + 4x^2 + 4y^2\right)\, dxdy \\
&= \int_0^1 \left(x + \frac{4}{3}x^3 + 4y^2x\right)\Big|_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{7}{3} + 4y^2\right) dy = \frac{7}{3}y + \frac{4}{3}y^3\Big|_0^1 = \frac{11}{3}.
\end{aligned}$$

I Ordinario, PAC. 2003-2

1. (6 puntos) Se tiene que $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x + y - 2, x + 2y - 1)$. Resolviendo $\nabla f = 0$, se tienen $2x + y - 2 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$, es decir $x = 1$, $y = 0$. Solo hay un punto crítico: $(1, 0)$. Ahora se calcula $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, por lo que $D = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$. El punto corresponde a un mínimo relativo que es $f(1, 0) = -1$, no hay máximos relativos.

2. (6 puntos) Sea $g(x, y) = x^2 + y^2 - 5$. Se tienen $\nabla f = (1, 2)$ y $\nabla g = (2x, 2y)$. Haciendo $\nabla f = \lambda \nabla g$ se tienen $1 = 2x\lambda$, $2 = 2y\lambda$. De aquí, $\lambda = \frac{1}{2x} = \frac{1}{y}$ y, por lo tanto $y = 2x$. Sustituyendo en $x^2 + y^2 = 5$ se tienen $x^2 + 4x^2 = 5$, es decir $x^2 = 1$ y, entonces $x = \pm 1$. Para $x = 1$ se tiene $y = 2$ y para $x = -1$ se tiene $y = -2$. Hay dos puntos críticos $(1, 2)$ y $(-1, -2)$. Evaluando: $f(1, 2) = 5$ y $f(-1, -2) = -5$. En $(1, 2)$ hay un máximo y en $(-1, -2)$ hay un mínimo.

3. (6 puntos) Se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}'\left(2, 2t, \frac{1}{t}\right) \Rightarrow \|\mathbf{c}'\| &= \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t}\sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} \\
&= \frac{1}{t}\sqrt{\left(2t^2 + 1\right)^2} = \frac{1}{t}\left(2t^2 + 1\right) = 2t + \frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, el punto $(2,1,0)$ se obtiene cuando $t = 1$ y el punto $(4,4,\ln 2)$ se obtiene cuando $t = 2$. Luego, la longitud de arco es

$$L = \int_1^2 \left(2t + \frac{1}{t}\right) dt = t^2 + \ln t\Big|_1^2 = 3 + \ln 2.$$

4. (6 puntos) Se debe determinar cuándo $\operatorname{rot} V = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} V = \nabla \times V &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{my}{x^2+y^2} & \dfrac{nx}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{nx}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{my}{x^2+y^2}\right)\right]\mathbf{k} \\
&= \left[\frac{n\left(x^2+y^2\right) - 2nx^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{m\left(x^2+y^2\right) - 2my^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]\mathbf{k} \\
&= \left[\frac{n\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{m\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right]\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Igualando a 0 se tiene $n\left(y^2-x^2\right) - m\left(x^2-y^2\right) = 0 \Rightarrow (m+n)\left(y^2-x^2\right) = 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, por lo que se debe tener $m + n = 0$.

5. (4 puntos) Se debe probar que $\mathbf{c}'(t) = F(\mathbf{c}(t))$. Se tiene $\mathbf{c}'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, e^t)$; mientras tanto $F(\mathbf{c}(t)) = F\left(\operatorname{sen} t, \cos t, e^t\right) = \left(\cos t, -\operatorname{sen} t, e^t\right)$. Por lo tanto son iguales.

6. (5 puntos) Considerando la integral interior vemos que x varía de $x = \frac{1}{2}y$ a $x = \sqrt{y}$. Así, la región está comprendida entre la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$. La gráfica de la región se da en la figura adjunta.

   Para cambiar el orden de integración vemos que cuando $y = 4$, entonces $x = \sqrt{4} = 2$ y cuando $y = 0$, entonces $x = 0$. Es decir $0 \leq x \leq 2$, mientras que, como la parábola queda por debajo de la recta, $x^2 \leq y \leq 2x$, por lo tanto

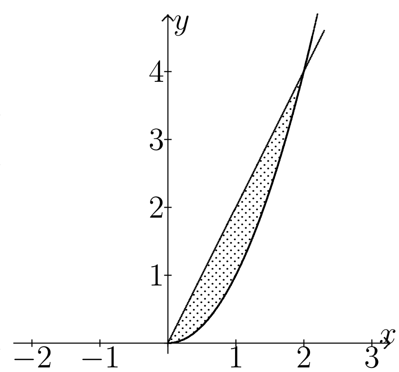

Figura 18: Problema 6.

$$\int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)dydx.$$

7. (7 puntos) La región de integración se proporciona a continuación. La recta que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ es $y=x$; la que une los puntos $(0,0)$ y $(10,1)$ es $10y=x$; la que une los puntos $(1,1)$ y $(10,1)$ es $y=1$. Así, si (x,y) pertenece a la región de integración, entonces $0 \leq y \leq 1$, mientras que $y \leq x \leq 10y$. La integral es, por lo tanto:

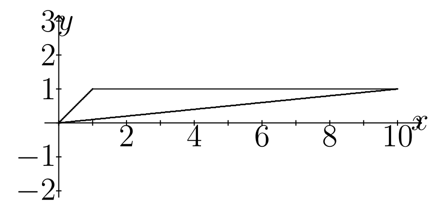

Figura 19: Problema 7

$$
\begin{aligned}
\int\int_D (x-2y)dxdy &= \int_0^1 \int_y^{10y} (x-2y)dxdy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 - 2xy\Big|_y^{10y} dy \\
&= \int_0^1 \frac{63}{2}y^2 dy \\
&= \frac{21}{2}y^3\Big|_0^1 = \frac{21}{2}.
\end{aligned}
$$

II Ordinario, PAC. 2003-2

1. (8 puntos) Primero se calcula la masa: $M = \int\int_R \rho(x,y)dxdy$. La recta $y=1$ y la parábola $y=x^2$ se cortan cuando $x=x^2$, es decir, $x=1$, $x=-1$ (la región no considera el valor $x=-1$), entonces x varía de $x=1$ a $x=2$ y y varía de $y=1$ a $y=x^2$. Luego

$$
\begin{aligned}
M &= \int\int_R \rho(x,y)dxdy \\
&= \int_1^2 \int_1^{x^2} ydydx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{2}y^2\Big|_1^{x^2} dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{2}\left(x^4-1\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x^5 - x\right)\Big|_1^2 = \frac{13}{5}.
\end{aligned}
$$

La coordenada $\overline{x}$ del centro de masa es

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{M}\int\int_R x\rho(x,y)dxdy \\ &= \frac{5}{13}\int_1^2\int_1^{x^2} xydydx \\ &= \frac{5}{13}\int_1^2 x\cdot\frac{1}{2}y^2\bigg|_1^{x^2} dx \\ &= \frac{5}{13}\int_1^2 \frac{1}{2}x\left(x^4-1\right)dx \\ &= \frac{5}{26}\int_1^2\left(x^5-x\right)dx \\ &= \frac{5}{26}\left(\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{2}x^2\right)\bigg|_1^2 = \frac{45}{26}.\end{aligned}$$

2. (7 puntos) Las coordenadas cilíndricas están dadas por $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$; su jacobiano es r. Si se hace $z = 1$ en la ecuación del paraboloide, entonces se tienen $1 = x^2+y^2$, de modo que la proyección del sólido sobre el plano xy es el círculo $x^2+y^2 \leq 1$.

   Por lo tanto, r varía de $r = 0$ a $r = 1$, θ varía de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$ y z varía de $z = x^2+y^2 = r^2$ a $z = 1$. La integral pedida es:

$$\begin{aligned}\iiint_W x\,dxdydz &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{r^2}^1 r\cos\theta dzd\theta dr \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(1-r^2\right)r\cos\theta d\theta dr \\ &= \int_0^1\left(r-r^3\right)\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{2\pi} dr = 0.\end{aligned}$$

3. (5 puntos) Los límites de integración están dados directamente por las desigualdades:

$$\begin{aligned}
\iiint_W (x-y)\ dxdydz &= \int_0^1 \int_0^x \int_0^{x+y} (x-y)\, dzdydx \\
&= \int_0^1 \int_0^x (x-y)\,(x+y)dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^x \left(x^2-y^2\right) dydx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^x dx \\
&= \int_0^1 \left(x^3 - \frac{1}{3}x^3\right) dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 x^3 dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

4. (6 puntos) Se tiene $c'(t) = (3\cos t, -3\operatorname{sen} t, 1)$, luego

$$\|c'(t)\| = \sqrt{9\cos^2 t + 9\operatorname{sen}^2 t + 1} = \sqrt{19}$$

Además $f(c(t)) = 3\cos t - 3\operatorname{sen} t + t$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_c f(x,y,z)\, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t - 3\operatorname{sen} t + t)\sqrt{19}dt \\
&= \sqrt{19}\left(3\operatorname{sen} t + 3\cos t + \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \sqrt{19}\left(3 + \frac{1}{8}\pi^2 - 3\right) = \frac{1}{8}\pi^2\sqrt{19}.
\end{aligned}$$

5. (7 puntos) La superficie se puede escribir como $z = g(x,y) = 6+2x+3y$, y, entonces $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 3$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_S (x+y-2z)dS &= \int_0^1 \int_0^2 (x+y-2(6+2x+3y))\sqrt{1+2^2+3^2}dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^2 (-3x-5y-12)\sqrt{14}dydx \\
&= \sqrt{14}\int_0^1 \left(-3xy - \frac{5}{2}y^2 - 12y\right)\Big|_0^2 dx \\
&= \sqrt{14}\int_0^1 (-6x-34)\, dx = \sqrt{14}\left(-3x^2-34x\right)\Big|_0^1 = -37\sqrt{14}
\end{aligned}$$

6. (7 puntos) La superficie se puede parametrizar mediante $x = \operatorname{sen}\phi\cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$, $z = \cos\phi$, con θ variando de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$ y ϕ variando de $\phi = 0$ a $\phi = \pi$. Con esto,

$$\begin{aligned} T_\theta &= (-\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \operatorname{sen}\phi\cos\theta, 0) \\ T_\phi &= (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\phi) \end{aligned}$$

   Entonces
$$T_\theta \times T_\phi = \left(-\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta, -\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta, -\operatorname{sen}\phi\cos\phi\right).$$
   Por otra parte
$$\mathbf{F} = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi).$$
   $\mathbf{F}\cdot T_\theta \times T_\phi = -\operatorname{sen}^3\phi\cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\phi\cos^2\phi = -\operatorname{sen}^3\phi - \operatorname{sen}\phi\cos^2\phi = -\operatorname{sen}\phi$.
   Luego
$$\iint_\Phi \mathbf{F}\cdot dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(-\operatorname{sen}\phi)\,d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\phi|_0^\pi \,d\theta = -4\pi.$$

I Reposición, PAC. 2003-2

1. (7 puntos) Sea $g(x,y) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Se tiene $\nabla f = (3,1,1)$ y $\nabla g = (4x, 2y, 2z)$. Haciendo $\nabla f = \lambda\nabla g$ se tienen $3 = 4x\lambda$, $1 = 2y\lambda$, $1 = 2z\lambda$. De aquí, $\lambda = \dfrac{3}{4x} = \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{2z}$ y, por lo tanto $y = \dfrac{2}{3}x$, $z = \dfrac{2}{3}x$. Sustituyendo en $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se tiene $2x^2 + \dfrac{4}{9}x^2 + \dfrac{4}{9}x^2 = 1$, es decir $x^2 = \dfrac{9}{26}$ y, entonces $x = \pm\dfrac{3}{\sqrt{26}}$. De aquí, $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{26}}$, $z = \pm\dfrac{2}{\sqrt{26}}$. Los puntos críticos son $\left(\dfrac{3}{\sqrt{26}}, \dfrac{2}{\sqrt{26}}, \dfrac{2}{\sqrt{26}}\right)$ y $\left(\dfrac{-3}{\sqrt{26}}, \dfrac{-2}{\sqrt{26}}, \dfrac{-2}{\sqrt{26}}\right)$. Evaluando: $f\left(\dfrac{3}{\sqrt{26}}, \dfrac{2}{\sqrt{26}}, \dfrac{2}{\sqrt{26}}\right) = \dfrac{13}{\sqrt{26}}$ y $f\left(\dfrac{-3}{\sqrt{26}}, \dfrac{-2}{\sqrt{26}}, \dfrac{-2}{\sqrt{26}}\right) = \dfrac{-13}{\sqrt{26}}$. En $\left(\dfrac{3}{\sqrt{26}}, \dfrac{2}{\sqrt{26}}, \dfrac{2}{\sqrt{26}}\right)$ hay un máximo y en $\left(\dfrac{-3}{\sqrt{26}}, \dfrac{-2}{\sqrt{26}}, \dfrac{-2}{\sqrt{26}}\right)$ hay un mínimo.

2. (5 puntos) Se tiene
$$\mathbf{c}' = (1,2,1) \Rightarrow \|\mathbf{c}'\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}.$$
   Por otra parte, el punto $(-1,-2,0)$ se obtiene cuando $t = -1$ y el punto $(1,2,2)$ se obtiene cuando $t = 1$. Luego, la longitud de arco es
$$L = \int_{-1}^{1}\sqrt{6}dt = 2\sqrt{6}.$$

3. (5 puntos) Se tiene $\operatorname{div} F = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z} = ye^{xy} + ze^{yz} + xe^{zx}$.

   Por otra parte

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} V &= \nabla \times V = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^{xy} & e^{yz} & e^{zx} \end{vmatrix} \\ &= -ye^{yz}\mathbf{i} - ze^{zx}\mathbf{j} - xe^{xy}\mathbf{k}\end{aligned}$$

4. (7 puntos) La región de integración se proporciona en la figura abajo.

   La recta que une los puntos $(0,2)$ y $(0,4)$ es $x = 0$; la que une los puntos $(2,0)$ y $(2,2)$ es $x = 2$; la que une los puntos $(0,2)$ y $(2,0)$ es $y = 2 - x$; finalmente, la recta que une los puntos $(0,4)$ y $(2,2)$ es $y = 4 - x$. Así, si (x,y) pertenece a la región de integración, entonces $0 \le x \le 2$, mientras que $2 - x \le y \le 4 - x$. La integral es, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 + 2xy)dxdy &= \int_0^2 \int_{2-x}^{4-x} (x^2 + 2xy)dydx \\ &= \int_0^2 x^2y + xy^2\Big|_{2-x}^{4-x} dx \\ &= \int_0^2 [2x^2 + x(12 - 4x)]dx \\ &= \int_0^2 [12x - 2x^2]dx \\ &= 6x^2 - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{56}{3}.\end{aligned}$$

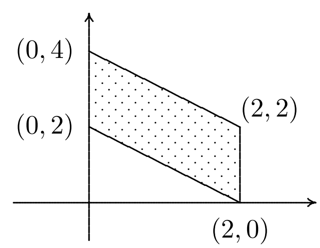

Figura 20: Región ejercicio 4.

II Reposición, PAC. 2003-2

1. (6 puntos) Primero se calcula la masa: $\int\int_D dxdy$. Como D es un semicírculo, utilizamos coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$; para la región dada se tienen $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le \pi$. Además, se sabe que el jacobiano es r, entonces

$$\iint_D dxdy = \int_0^1 \int_0^\pi r d\theta dr = \frac{1}{2}\pi.$$

Ahora, usando nuevamente coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\iint_D x^2ydxdy &= \int_0^1\int_0^\pi r^2\cos^2\theta r\,\mathrm{sen}\,\theta r d\theta dr\\ &= \int_0^1\int_0^\pi r^4\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta dr\\ &= \int_0^1 r^4\cdot\frac{-1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^\pi dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\,r^5\big|_0^1 = \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

Por lo tanto el promedio es $\dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{2}\pi} = \dfrac{4}{15\pi}$.

2. (6 puntos) Las coordenadas cilíndricas están dadas por $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$; su jacobiano es r. Se tienen $x^2+y^2 \leq 1$, de modo que r se mueve entre 0 y 1 y θ entre 0 y 2π. De la desigualdad $0 \leq z \leq 4-x^2-y^2$ se tienen que z se mueve entre 0 y $4-r^2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\iiint_W (x^2+y^2)\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{4-r^2} r^2rdzdrd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(r^3z\right)\Big|_0^{4-r^2} drd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[r^3\left(4-r^2\right)\right] drd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[4r^3-r^5\right] drd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(r^4-\frac{1}{5}r^5\right)\Big|_0^1 dr\\ &= \frac{8}{5}\pi.\end{aligned}$$

3. (6 puntos) Se tiene $c'(t) = (3\cos t, -3\,\mathrm{sen}\,t, 1)$, luego $\|c'(t)\| = \sqrt{9\cos^2 t + 9\,\mathrm{sen}^2\,t + 1} = \sqrt{19}$. Además $f(c(t)) = 6\cos t + 3t$. Luego

$$\begin{aligned}\int_c f(x,y,z)\,ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (6\cos t + 3t)\sqrt{19}dt\\ &= \sqrt{19}\left(6\,\mathrm{sen}\,t + \frac{3}{2}t^2\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{19}\left(6+\frac{3}{8}\pi^2\right).\end{aligned}$$

4. (6 puntos) La superficie se puede escribir como $z = g(x,y) = 2x-5y$, y, entonces $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2$,

$\dfrac{\partial g}{\partial y} = -5$. Luego,

$$\begin{aligned}
\iint_S (3x+y^2)dS &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} \left(3x+y^2\right)\sqrt{1+2^2+(-5)^2}dydx \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} (3x+y^2)\sqrt{30}dydx \\
&= \sqrt{30}\int_{-1}^{1} \left(3xy+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^1 dx \\
&= \sqrt{30}\int_{-1}^{1} \left(3x+\frac{1}{3}\right) dx \\
&= \sqrt{30}\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= \sqrt{30}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{30}.
\end{aligned}$$

Referencias de consulta

[1] Pita Ruiz Claudio, (1995) *Cálculo Vectorial*. Mexico: Pearson Prentice-Hall.

[2] Bradley G. et al (1994). *Cálculo de Varias Variables* Mexico: Pearson Prentice-Hall.

[3] Spiegel, M. (1993) *Cálculo Superior*. España. McGraw-Hill.

Algunos enlaces de interés

1. http://www.uantof.cl/facultades/csbasicas/Matematicas/academicos/emartinez/calculo3/index.html
2. http://dieumsnh.qfb.umich.mx/INTEGRAL/superficie.htm
3. http://dieumsnh.qfb.umich.mx/ELECTRO/operador_nabla.htm
4. http://cabierta.uchile.cl/libros/c-utreras/node136.htm
5. Problemas resueltos de cálculo vectorial y análisis lineal